Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 517.53:519.947.42 *МАТЕМАТИКА*

А. И. СЕРБИН

О ФУНКЦИЯХ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛОМ МАРТИНЕЛЛИ — БОХНЕРА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 20 VII 1970)

Пусть в пространстве $\mathbf{C}^n$ комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ задана замкнутая $(2n-1)$-мерная гладкая поверхность Ω, делящая пространство $\mathbf{C}^n$ на внутреннюю D^+ и внешнюю D^- области. Тогда для голоморфной в $\overline{D}^+$ функции $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ известно (см., например, ([1]), стр. 326) интегральное представление Мартинелли — Бохнера:

$$\int_\Omega f(\tau) K(z, \tau) = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in D^+, \\ 0 & \text{при } z \in D^-, \end{cases}$$

где

$$K(z, \tau) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum\limits_{k=1}^n (\bar\tau_k - \bar z_k)\, d\bar\tau_1 \wedge d\tau_1 \wedge \ldots \wedge [d\bar\tau_k] \wedge d\tau_k \wedge \ldots \wedge d\bar\tau_n \wedge d\tau_n}{|\tau - z|^{2n}}$$

(член $d\bar\tau_k$, стоящий в квадратных скобках, следует опустить),

$$|\tau - z| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\tau_k - z_k|^2}.$$

В работах Лу Ци-кэна — Чжун Тун-дэ ([4]) и В. А. Какичева ([5]) изучены некоторые свойства интеграла типа Мартинелли — Бохнера

$$w^\pm(z) = \int_\Omega \varphi(\tau) K(z, \tau), \tag{1}$$

где $\varphi(\tau)$ — произвольная функция, удовлетворяющая на Ω условию Гёльдера. В частности доказано, что интеграл (1) существует в смысле главного значения по Коши при $z \in \Omega$, для предельных значений $w^\pm(t)$ на Ω установлены формулы ([4])

$$w^\pm(t) = \pm {}^1/_2 \varphi(t) + \int_\Omega \varphi(\tau) K(t, \tau), \tag{2}$$

и граничные значения $w^\pm(t)$ удовлетворяют на Ω условию Гёльдера ([5]).

Функция $w^\pm(z)$, определенная интегралом (1), вообще говоря, не является голоморфной. Так как ядро $K(z, \tau)$ есть гармоническая функция переменного z при $z = \tau$, то формула (1) определяет две гармонические комплексные функции $w^+(z)$ и $w^-(z)$ в областях D^+ и D^- соответственно, причем при достаточно больших $|z|$ $|w^-(z)| \leqslant A / R^{2n-1}$, где $R = \inf\limits_{\tau \in \Omega} |\tau - z|$. Поэтому естественно возникает задача использования этого ядра для представления комплексных гармонических функций $w(z) = u(z) + iv(z)$ в областях D^+ и D^-. В этой статье мы используем ядро $K(z, \tau)$ для представления функций, определенных интегралом (1), формулами, аналогичными формулам Коши для аналитических функций одной комплексной переменной.

Во всех дальнейших рассуждениях мы считаем, что Ω — $(2n-1)$-мерная замкнутая ляпуновская поверхность.

Теорема 1. *Пусть на Ω задана дифференциальная форма*

$$h(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} h_k(\sigma)\, d\bar{\sigma}_1 \wedge d\sigma_1 \wedge \ldots \wedge [d\bar{\sigma}_k] \wedge d\sigma_k \wedge \ldots \wedge d\bar{\sigma}_n \wedge d\sigma_n,$$

где функции $h_k(\sigma)$ удовлетворяют условию Гёльдера. Тогда дифференциальная форма

$$H(z) = \int_{\Omega} h(\sigma)\, K(\sigma, z)$$

имеет предельные значения при $z \to \tau \in \Omega$ по нормали n_τ, и выполняются равенства

$$H^{\pm}(\tau) = \mp {}^1/_2 h(\tau) + \int_{\Omega} h(\sigma)\, K(\sigma, \tau). \tag{3}$$

Сначала покажем, что интеграл в равенстве (3) существует в смысле главного значения по Коши. Для этого представим ядро $K(\sigma, \tau)$ в виде [5]

$$K(\sigma, \tau) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n i} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\tau)(\bar{\tau}_k - \bar{\sigma}_k)}{|\tau - \sigma|^{2n}}\, dS_\tau.$$

Точно так же

$$h(\sigma) = (2i)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sigma)\, h_k(\sigma)\, dS_\sigma.$$

Тогда

$$\int_{\Omega} h(\sigma)\, K(\sigma, \tau) = \frac{(2i)^{n-2}(n-1)!}{\pi^n} dS_\tau \int_{\Omega} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sigma)\, h_k(\sigma) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\tau)(\bar{\tau}_k - \bar{\sigma}_k)\, dS_\sigma}{|\tau - \sigma|^{2n}} =$$

$$= \frac{(2i)^{n-2}(n-1)!}{\pi^n} dS_\tau \left\{ \int_{\Omega} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sigma)\, h_k(\sigma) \sum_{k=1}^{n} [\lambda_k(\tau) - \lambda_k(\sigma)](\bar{\tau}_k - \bar{\sigma}_k)\, dS_\sigma}{|\tau - \sigma|^{2n}} - \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sigma)\, h_k(\sigma) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sigma)(\bar{\sigma}_k - \bar{\tau}_k)\, dS_\sigma}{|\sigma - \tau|^{2n}} \right\}.$$

Поскольку Ω — ляпуновская поверхность, то $\lambda_k(\tau)$ удовлетворяют условию Гёльдера ([3], стр. 357), и поэтому первый интеграл правой части существует как несобственный, а второй существует в смысле главного значения по Коши [4].

Пусть теперь z — произвольная точка на нормали n_τ к поверхности Ω в точке τ. Тогда

$$H(z) = \int_{\Omega} h(\sigma)\, K(\sigma, z) = \frac{(2i)^{n-2}(n-1)!}{\pi^n} dS_\tau \int_{\Omega} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sigma)\, h_k(\sigma) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\tau)(\bar{z}_k - \bar{\sigma}_k) dS_\sigma}{|z - \sigma|^{2n}} =$$

$$= \frac{(2i)^{n-2}(n-1)!}{\pi^n} dS_\tau \left\{ \int_{\Omega} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sigma)\, h_k(\sigma) \sum_{k=1}^{n} [\lambda_k(\tau) - \lambda_k(\sigma)](\bar{z}_k - \bar{\sigma}_k)\, dS_\sigma}{|z - \sigma|^{2n}} - \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sigma)\, h_k(\sigma) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\sigma)(\bar{\sigma}_k - \bar{z}_k)\, dS_\sigma}{|\sigma - z|^{2n}} \right\} = \frac{(2i)^{n-2}(n-1)!}{\pi^n} dS_\tau \{H_1(z) - H_2(z)\}. \tag{4}$$

Так как $\lambda_k(\sigma)$ удовлетворяют условию Гёльдера

$$|\lambda_k(\tau)-\lambda_k(\sigma)|\leqslant C|\tau-\sigma|^\alpha \quad (0<\alpha<1),$$

то, повторяя известные рассуждения ((3), стр. 379), мы получим, что $H_1(z)$ при переходе через точку τ меняется непрерывно. Предельные же значения для

$$H_2(z)=\int\limits_\Omega \frac{\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(\sigma)h_k(\sigma)\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(\sigma)(\bar\sigma_k-\bar z_k)\,dS_\sigma}{|\sigma-z|^{2n}}=\frac{2i\pi^n}{(n-1)!}\int\limits_\Omega\sum_{k=1}^n\lambda_k(\sigma)h_k(\sigma)\,K(z,\sigma)$$

в соответствии с формулой (2) будут

$$H_2^\pm(\tau)=\pm\frac{i\pi^n}{(n-1)!}\sum_{k=1}^n\lambda_k(\tau)h_k(\tau)+\int\limits_\Omega\frac{\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(\sigma)h_k(\sigma)\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(\sigma)(\bar\sigma_k-\bar\tau_k)\,dS_\sigma}{|\sigma-\tau|^{2n}}.$$

Тогда из равенства (4) получим

$$H^\pm(\tau)=\mp{}^1/_2(2i)^{n-1}\sum_{k=1}^n\lambda_k(\tau)h_k(\tau)\,dS_\tau+$$

$$+\frac{(2i)^{n-2}(n-1)!}{\pi^n}dS_\tau\left\{\int\limits_\Omega\frac{\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(\sigma)h_k(\sigma)\sum\limits_{k=1}^n [\lambda_k(\tau)-\lambda_k(\sigma)](\bar\tau_k-\bar\sigma_k)\,dS_\sigma}{|\sigma-\tau|^{2n}}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_\Omega\frac{\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(\sigma)h_k(\sigma)\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k(\sigma)(\bar\sigma_k-\bar\tau_k)\,dS_\sigma}{|\sigma-\tau|^{2n}}\right\}=\mp{}^1/_2h(\tau)+\int\limits_\Omega h(\sigma)K(\sigma,\tau).$$

Теорема 2. *Для функций* $w^+(z)$ *и* $w^-(z)$, *определенных интегралом* (1), *выполняются равенства*

$$\int\limits_\Omega w^+(\tau)K(z,\tau)=\begin{cases}w^+(z) & \text{при } z\in D^+,\\ 0 & \text{при } z\in D^-;\end{cases} \tag{5}$$

$$\int\limits_\Omega w^-(\tau)K(z,\tau)=\begin{cases}-w^-(z) & \text{при } z\in D^-,\\ 0 & \text{при } z\in D^+.\end{cases} \tag{6}$$

Докажем равенство (5). Рассмотрим интеграл

$$A(z,t)=\int\limits_\Omega K(z,\sigma)K(\sigma,t), \tag{7}$$

где z и t — произвольные точки из D^+ $(z\neq t)$. $A(z,t)$ по переменной z является гармонической функцией, а по t — дифференциальной формой порядка $(2n-1)$, причем $d_tA(z,t)\equiv 0$. Этими же свойствами обладает форма $K(z,t)$. Будем искать $A(z,t)$ в виде $A(z,t)=F(z,t)K(z,t)$, где $F(z,t)$ — некоторая дифференцируемая функция по переменной t. Но так как $d_tF(z,t)\equiv 0$, то $A(z,t)=F(z)K(z,t)$. Пусть теперь точка t пробегает некоторую поверхность ω, целиком лежащую внутри Ω и содержащую внутри себя точку z. Тогда интегрируя по ω, получаем

$$\int\limits_\omega A(z,t)=F(z)\int\limits_\omega K(z,t)=F(z).$$

С другой стороны, из равенства (7) получаем

$$\int\limits_\omega A(z,t)=\int\limits_\omega\left\{\int\limits_\Omega K(z,\sigma)K(\sigma,t)\right\}=\int\limits_\Omega K(z,\sigma)\int\limits_\omega K(\sigma,t)\equiv 0.$$

так что $F(z) \equiv 0$. Поэтому

$$\int_{\Omega} K(z, \sigma) K(\sigma, t) = 0 \tag{8}$$

при любых $z, t \in D^{+}$ $(z \neq t)$.

Пусть теперь $t \to \tau \in \Omega$ по нормали n_τ. Тогда из (8) по теореме 1 получаем равенство

$$\int_{\Omega} K(z, \sigma) K(\sigma, \tau) = {}^1/_2 K(z, \tau) \quad (z \in D^{+}). \tag{9}$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_{\Omega} K(z, \sigma) K(\sigma, \tau) = -{}^1/_2 K(z, \tau) \quad (z \in D^{-}). \tag{10}$$

Учитывая равенства (1), (2), (9) и (10), получаем

$$\int_{\Omega} w^{+}(\tau) K(z, \tau) = {}^1/_2 \int_{\Omega} \varphi(\tau) K(z, \tau) + \int_{\Omega_\tau} K(z, \tau) \int_{\Omega_\sigma} \varphi(\sigma) K(\tau, \sigma) =$$

$$= {}^1/_2 \int_{\Omega} \varphi(\tau) K(z, \tau) + \int_{\Omega_\tau} \varphi(\tau) \int_{\Omega_\sigma} K(z, \sigma) K(\sigma, \tau) = \begin{cases} w^{+}(z) & \text{при } z \in D^{+}, \\ 0 & \text{при } z \in D^{-}. \end{cases}$$

Возможность перестановки порядка интегрирования, которой мы здесь воспользовались, доказывается просто. Равенство (6) доказывается аналогично.

Комплексные гармонические функции, для которых имеют место формулы (5) или (6), условимся называть функциями, представимыми интегралом Мартинелли — Бохнера. Для таких функций обычным образом (см., например, ([2]), стр. 129) доказывается

Теорема 3. *Для того чтобы удовлетворяющая условию Гёльдера на Ω функция $\varphi(t)$ была граничным значением функции, представимой интегралом Мартинелли — Бохнера в области $D^{\pm}$, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\mp {}^1/_2 \varphi(t) + \int_{\Omega} \varphi(\tau) K(t, \tau) = 0.$$

Теорема 4. *Если $\varphi(t)$ удовлетворяет на Ω условию Гёльдера, то*

$$\int_{\Omega_\tau} K(t, \tau) \int_{\Omega_\sigma} \varphi(\sigma) K(\tau, \sigma) = {}^1/_4 \varphi(t) \quad (t \in \Omega).$$

В самом деле, из равенства (2) имеем

$$w^{+}(t) - w^{-}(t) = \varphi(t), \quad w^{+}(t) + w^{-}(t) = 2 \int_{\Omega} \varphi(\sigma) K(t, \sigma). \tag{11}$$

Но из теорем 2 и 3 следует, что

$$\int_{\Omega} w^{+}(\tau) K(t, \tau) = {}^1/_2 w^{+}(t), \quad \int_{\Omega} w^{-}(\tau) K(t, \tau) = -{}^1/_2 w^{-}(t).$$

Тогда из (11) получаем требуемую формулу обращения особых интегралов Мартинелли — Бохнера.

Саратовский государственный педагогический институт

Поступило 2 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962. [2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962. [3] С. Г. Михлин, Курс математической физики, «Наука», 1968. [4] C. H. Look, T. D. Chung, Acta math. Sinica, 7, N 1, 144 (1957). [5] В. А. Какичев, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст., 96, 145 (1960).