Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 519.53/1 + 517.432 МАТЕМАТИКА

В. Н. СУДАКОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Г. БИРКГОФА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 9 VII 1970)

1. Известная теорема Биркгофа — Неймана ([1]) утверждает, что в множестве $\mathfrak{B}$ бистохастических матриц B данной размерности экстремальными точками служат матрицы перестановок и только они. Иными словами, каждая бистохастическая матрица $B \in \mathfrak{B}$ допускает представление $B = \sum_k \lambda_k P_k$, где $\lambda_k \geqslant 0$, а P_k — такие $(0-1)$-матрицы, каждая строка и каждый столбец которых содержат в точности одну единицу. Г. Биркгоф (([2]), проблема 111) предложил распространить эту теорему на бесконечномерный случай, использовав подходящие гипотезы. Эта проблема для бесконечных бистохастических матриц с разных точек зрения была рассмотрена в работах ([3–6]). В работах ([7–9]) изучалась возможность аппроксимации в том или ином смысле бистохастических операторов класса $L^\infty(X, m) \to L^\infty(X, m)$ выпуклыми комбинациями операторов, сопряженных к автоморфизмам пространства с мерой (X, m). (Эти последние естественно рассматривать как аналоги конечномерных операторов, порождаемых в данном базисе матрицами перестановок.)

Пусть (M, μ) — пространство с неатомической вероятностной мерой, допускающее счетный базис и полное (совершенное), т. е. пространство Лебега ([10]). Последнее ограничение позволяет, в частности, говорить об условных мерах (канонической системе мер) на элементах любого измеримого разбиения. В дальнейшем формулировки теорем будут приведены в терминах пространства с мерой, но можно было бы их переформулировать на языке бистохастических операторов. Пусть ξ и η — два такие измеримые разбиения пространства (M, μ), что $\xi\eta = \varepsilon$ (разбиение на точки). Иначе говоря, пусть существуют такие измеримые функции $f: M \to R^1$ и $g: M \to R^1$, что ξ и η — разбиения на прообразы точек, а определяемое функциями f и g отображение $(f, g): M \to R^2$ является изоморфизмом пространств с мерами (M, μ) и $(R^2, (f, g)\mu)$. Рассмотрим пространство $M/\xi \times M/\eta$ и на нем образ меры μ при каноническом вложении $(p, q): M \to M/\xi \times M/\eta$ (p и q — канонические проекции $M \to M/\xi$ и $M \to M/\eta$). В дальнейшем меру $(p, q)\mu$ будем также обозначать μ, отождествляя пространства M и $M/\xi \times M/\eta$. Пусть $\mu_\xi = p\mu$, $\mu_\eta = q\mu$ — меры на фактор-пространствах M/ξ и M/η, которые мы будем предполагать неатомическими. Каждому изоморфизму (гомоморфизму) T пространства $(M/\xi, \mu_\xi)$ на пространство $(M/\eta, \mu_\eta)$ сопоставим меру μ_T, сосредоточенную на графике этого изоморфизма (гомоморфизма), и такую, что $p\mu_T = \mu_\xi$, $q\mu_T = \mu_\eta$. Меры μ и μ_T можно рассматривать как бесконечномерные аналоги бистохастической матрицы и матрицы перестановок (в случае, когда T — изоморфизм). Бесконечномерным непрерывным аналогом теоремы Неймана — Биркгофа следует считать теорему о возможности представления меры μ в виде барицентра некоторой меры μ_η, заданной на множестве мер $\{\mu_T\}$, порождаемых изоморфизмами.

В отличие от дискретного случая такое представление возможно не всегда: множество $\mathfrak{B}$ бистохастических мер на $M/\xi \times M/\eta$, т. е. таких мер, проекции которых на фактор-пространства M/ξ и M/η совпадают с μ_ξ и μ_η, содержит экстремальные точки, не имеющие вида μ_T, где T — изоморфизм. Экстремальными точками будут, в частности, все меры вида μ_T, где T — гомоморфизм. Среди экстремальных точек множества $\mathfrak{B}$ имеются, например, такие меры, для которых на почти каждом элементе разбиения ξ условные меры (меры из канонической системы мер ([10])) суть равные нагрузки на паре точек, и то же самое верно относительно условных мер на элементах разбиения η (А. М. Вершик; см. ([11])). Этот пример, который можно рассматривать как континуальный аналог такой бистохастической матрицы, в каждой строке и в каждом столбце которой два элемента равны каждый по $^1/_2$, подчеркивает своеобразие ситуации в рассматриваемом непрерывном случае. Однако в том случае, когда мера μ на $M/\xi\times M/\eta$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_\xi\times\mu_\eta$, имеет место следующий существенно усиленный аналог теоремы Неймана — Биркгофа.

Теорема 1. *Пусть мера μ на $M/\xi\times M/\eta$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_\xi\times\mu_\eta$. Тогда мера μ является барицентром некоторой положительной меры μ_η, заданной на множестве $\{\mu_T\}$ мер, порождаемых изоморфизмами пространств $(M/\xi, \mu_\xi)$ и $(M/\eta, \mu_\eta)$. При этом барицентры ограничений меры μ_η на любые два непересекающиеся измеримые подмножества множества $\{\mu_T\}$ дизъюнктны (сингулярны).*

Точный смысл термина барицентр и запас измеримых подмножеств на $\{\mu_T\}$ станут ясны из дальнейшего. Отметим, наконец, что выполнение условия дизъюнктности не может, вообще говоря, быть достигнуто в случае бистохастических матриц (конечных или бесконечных).

2. Задача о представлении бистохастической меры в виде интеграла по множеству мер, порождаемых изоморфизмами, с дополнительным требованием дизъюнктности, о котором шла речь выше, может быть переформулирована как задача о существовании измеримого разбиения ζ пространства с мерой (M, μ), являющегося независимым дополнением к разбиению ξ и к разбиению η. Иными словами, изучается вопрос о существовании такой измеримой функции $h: M\to R^1$, что: 1) определяемая отображением (f, h): $M\to R^2$ мера $(f, h)\mu$ в R^2 есть произведение мер $f\mu$ и $h\mu$ и аналогично мера $(g, h)\mu$ есть произведение мер $g\mu$ и $h\mu$; 2) отображения (f, h) и (g, h) устанавливают изоморфизм пространства (M, μ) и пространства $(R^2, (f, h)\mu)$ и, соответственно, пространства (M, μ) и пространства $(R^2, (g, h)\mu)$. Действительно, легко проверяется, что, для того чтобы измеримое разбиение ζ пространства с мерой (M, μ) было независимым дополнением к измеримым разбиениям ξ и η, необходимо и достаточно, чтобы почти каждый (в смысле меры μ_η, являющейся образом меры μ при каноническом проектировании $M\to M/\eta$) элемент разбиения ζ, рассматриваемый со своей условной мерой как самостоятельное пространство с мерой, определял бы тем самым на $M/\xi\times M/\eta$ некоторую бистохастическую меру вида μ_T, где T — изоморфизм $(M/\xi, \mu_\xi)$ и $(M/\eta, \mu_\eta)$.

Теорема 1а (см. ([11, 12])). *Пусть ξ и η — такие измеримые разбиения пространства с мерой (M, μ),* что $\xi\eta=\varepsilon$, *μ_ξ и μ_η — неатомические, и мера $(p, q)\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_\xi\times\mu_\eta$ на $M/\xi\times M/\eta$ (p, q — канонические отображения $M\to M/\xi$, $M\to M/\eta$). Тогда существует измеримое разбиение ζ пространства (M, μ), являющееся независимым дополнением к разбиениям ξ и η.*

Образ μ_η меры μ при каноническом отображении $M\to M/\eta$ можно рассматривать теперь как меру μ_η на множестве изоморфизмов пространств $(M/\xi, \mu_\xi)$ и $(M/\eta, \mu_\eta)$, о которой шла речь в теореме 1. Теорема 1а не переносится на случай трех и более измеримых разбиений.

Приведем еще две теоремы, использующиеся при доказательстве теоремы 1а, но представляющие и самостоятельный интерес.

Теорема 2 (см. ([13, 14])). *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — такие измеримые разбиения пространства с мерой (M, μ), у которых почти все условные меры неатомические, и меры $\mu_1, \ldots, \mu_m$ абсолютно непрерывные относительно меры*

μ. *Тогда экстремальными точками выпуклого множества K функций f на пространстве M, определяемых условиями:* $0 \leqslant f \leqslant 1$, $\int\limits_M f\varphi_j d\mu_i = \lambda \int\limits_M \varphi_j d\mu_i$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $0 < \lambda < 1$, φ_j — *любая функция, измеримая относительно* ξ_j, *служат только функции, принимающие значения* 0 *и* 1.

В частности, существует нетривиальное измеримое разбиение ζ пространства (M, μ), не зависимое от разбиений $\xi_1, \ldots, \xi_n$ относительно каждой из мер $\mu_1, \ldots, \mu_m$.

Пусть теперь ξ и η — измеримые разбиения пространства (M, μ), $\xi\eta = \varepsilon$, $f = f(x, y)$, $x \in M / \xi$, $y \in M / \eta$ — произвольная интегрируемая функция на M. Пусть $(pf)(x) = \int\limits_{M/\eta} f d\mu_x(y)$, $(qf)(y) = \int\limits_{M/\xi} f d\mu_y(x)$ (обозначения понятны). Обозначим $V(M) = \{f\colon 0 \leqslant f \leqslant 1\}$. Пусть $\hat\xi$ и $\hat\eta$ — некоторые укрупнения разбиений ξ и η, состоящие каждое из двух множеств; φ, ψ — канонические отображения $M / \xi \to M / \hat\xi$, $M / \eta \to M / \hat\eta$; p, q — канонические отображения $\hat M \to \hat M / \hat\xi$, $\hat M \to \hat M / \hat\eta$, где $\hat M = M / \hat\xi\hat\eta$; $\hat\varphi$, $\hat\psi$, $\hat p$, $\hat q$ распространяются на интегрируемые функции, как это определено для p и q.

Теорема 3. *Пусть даны функции $r(x)$ и $s(y)$. Для того чтобы нашлась функция $f \in V(M)$, для которой $pf = r$, $qf = s$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $\hat\xi$ и $\hat\eta$, состоящих каждое из двух элементов, нашлась бы функция $\hat f \in V(\hat M)$, для которой выполняются равенства $\hat p\hat f = \hat\varphi r$, $\hat q\hat f = \hat\psi s$.*

Для частного случая $\mu = \mu_\xi \times \mu_\eta$ условия, при которых существует требуемая функция f, в других терминах указаны в ([15]).

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
5 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Birkhoff, Univ. Nac. Tucuman Rev. (A), 5 (1946). [2] Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1952. [3] J. R. Isbell, Proc. Am. Math. Soc., 6 (1955). [4] B. A. Rattray, J. E. L. Peck, Trans. Roy. Soc. Canada, Sec. III (3), 49 (1955). [5] D. G. Kendall, J. London Math. Soc., 35 (1960). [6] P. Pévész, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 13 (1962). [7] J. E. L. Peck, Michigan Math. J., 6 (1959). [8] J. R. Brown, Pacific J. Math., 16, № 1 (1966). [9] Choo-whan Kim, Pacific J. Math., 26, № 3 (1968). [10] В. А. Рохлин, Матем. сборн., 15 (67), 1 (1949). [11] В. Н. Судаков, Тр. матем. инст., 111 (1970). [12] В. Н. Судаков, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. инст. АН СССР, 19 (1970). [13] В. Н. Судаков, Trans of the IV Prague Conf. on Inform. Theory. Statist. Dec. Functions and Random Proc., Prague, 1965. [14] И. В. Романовский, В. Н. Судаков, Тр. Матем. инст. АН СССР, 79 (1965). [15] Л. В. Канторович, И. В. Романовский, ДАН, 166, № 2 (1966).