Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

ФИЗИКА

Б. А. ТРУБНИКОВ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОАГУЛЯЦИИ ПРИ БИЛИНЕЙНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ СЛИПАНИЯ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 15 VII 1970)

1. В теории коллоидных растворов и при рассмотрении процесса слипания частиц космической пыли встречаются уравнения коагуляции (n_k — плотность частиц с массой $m_k = km_1$)

$$\frac{d}{dt} n_k = {}^1/_2 \sum_{i+j=k} n_i n_j A_{ij} - n_k \sum_{i=1}^{\infty} n_i A_{ik}. \tag{1}$$

Они были решены М. Смолуховским [1] при $n_1(0) \neq 0$, $n_{k\geq 2}(0) = 0$ для коэффициента слипания вида $A_{ik} = \alpha = \text{const}$. В. С. Софроновым [2] получен ряд частных решений для $A_{ik} = \beta(i + k)$.

В настоящей работе рассмотрен случай

$$A_{ik} = \alpha + \beta(i + k) + \gamma ik, \tag{2}$$

который является, по-видимому, наиболее общим, допускающим аналитическое решение.

Предполагая, что при $t = 0$ составные частицы отсутствовали, в случае (2) для величины $n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i$ из системы (1) получим уравнение

$$-df/d\tau = \alpha f^2 + 2\beta f + \gamma, \quad f = n(t)/n(0), \quad \tau = {}^1/_2 n(0)t, \tag{3}$$

решая которое, находим

$$f = (\sqrt{\Delta} - (\beta + \gamma)\,\mathrm{th}\,(\tau\sqrt{\Delta}))\,/\,(\sqrt{\Delta} + (\beta + \alpha)\,\mathrm{th}\,(\tau\sqrt{\Delta}))$$

или

$$f = (\sqrt{|\Delta|} - (\beta + \gamma)\,\mathrm{tg}\,(\tau\sqrt{|\Delta|}))\,/\,(\sqrt{|\Delta|} + (\beta + \alpha)\,\mathrm{tg}\,(\tau\sqrt{|\Delta|})) \tag{4}$$

соответственно при $\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma > 0$ или $\Delta = -|\Delta| < 0$. Представив плотность частиц k-го сорта в виде

$$n_k(t) = n(0) C_k \varphi(t) e^{-k\psi(t)}, \tag{5}$$

из системы (1) находим функции

$$\varphi = (\alpha f^2 + 2\beta f + \gamma)\,/\,(1 - f)(\alpha + 2\beta + \gamma),$$

$$\psi = \ln\frac{1}{1-f} - 2\frac{\Delta}{\alpha}\tau + \frac{\beta}{\alpha}\ln\frac{\alpha + 2\beta + \gamma}{\alpha f^2 + 2\beta f + \gamma}, \tag{6}$$

а для C_k получим рекуррентное соотношение

$$C_{k\geq 2} = \frac{1}{1-k}\sum_{i=1}^{k-1} C_i C_{k-i}(A_{i,k-i}/A_{1,1}), \quad C_1 = 1, \tag{7}$$

из которого последовательно можно определить все коэффициенты.

Рассмотрим ряд частных случаев.

Случай А, когда $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$. Решениями (7) являются $C_k = 1$ и из (4), (5), (6) получим решение Смолуховского

$$f(t) = n(t)/n(0) = (1 + {}^1/_2 \alpha n(0)t)^{-1}, \quad n_k(t) = n(0) f^2 (1 - f)^{k-1}. \tag{8}$$

Случай B, когда $\beta \neq 0$, $\alpha = \gamma = 0$. Решениями (7) являются $C_k = k^{k-1} / k!$ и при этом

$$f(t) = \frac{n(t)}{n(0)} = e^{-\beta n(0) t}, \quad n_k(t) = n(0) \frac{k^{k-1}}{k!} \frac{f}{1-f} e^{-k[1-f-\ln(1-f)]}. \tag{9}$$

При $t \gg 1 / \beta n(0)$ величина $f \ll 1$ мала, и тогда

$$n_k(t) \cong n(0) \frac{(k/e)^k}{k!\, k} f e^{-{}^1\!/_2 k f^2} \approx \frac{n(0) f}{\sqrt{2\pi k^3}} \sim k^{-{}^3\!/_2} \tag{10}$$

для $1 \ll k \ll 2 / f^2$, в то время как в решении (8) начальный участок асимптотического спектра не зависит от k.

Случай C, когда $\gamma \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$. Решениями (7) являются $C_k = (2k)^{k-1} / k! k$ и из (4), (5), (6) находим

$$f(t) = \frac{n(t)}{n(0)} = 1 - \frac{1}{2} \gamma n(0) t, \quad n_k(t) = n(0) \frac{(2k)^{k-1}}{k!\, k (1-f)} [(1-f) e^{-2(1-f)}]^k. \tag{11}$$

Здесь все частицы слипаются за конечное время.

2. Если начальное распределение не монодисперсно, то вместо системы (1) удобно использовать уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \nu_m(t) = {}^1\!/_2 \int_0^m \nu_{m'} \nu_{m-m'} A_{m', m-m'} dm' - \nu_m \int_0^\infty \nu_{m'} A_{m,m'} dm', \tag{12}$$

получаемое из (1) заменой $\sum_i \to \frac{1}{m_1} \int dm$, $n_i \to m_1 \nu_m(t)$. Формула (2) очевидно эквивалентна (α, β, γ — новые постоянные)

$$A_{m,m'} = \alpha + \beta(m + m') + \gamma m m', \tag{13}$$

и при этом для величины $n(t) = \int_0^\infty \nu_m dm$ из (12) получим уравнение, эквивалентное (3), из которого найдем (ср. (4))

$$f(t) = n(t) / n(0) = \frac{\sqrt{\Delta} - (\beta + \gamma\rho/n_0) \operatorname{th}({}^1\!/_2 \rho t \sqrt{\Delta})}{\sqrt{\Delta} + (\beta + \alpha n_0/\rho) \operatorname{th}({}^1\!/_2 \rho t \sqrt{\Delta})}, \tag{14}$$

где $n_0 = n(0)$, $\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma$, $\rho = \int_0^\infty m \nu_m dm$ — масса единицы объема, сохраняющаяся во времени.

Для отыскания спектра воспользуемся преобразованием Лапласа

$$\nu_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} L(p, t) e^{mp} dp, \quad L(p, t) = \int_0^\infty e^{-mp} \nu_m(t)\, dm, \tag{15}$$

которое переводит уравнение (12) в дифференциальное:

$$\begin{aligned} \partial L / \partial t = \alpha({}^1\!/_2 L^2 - nL) + \beta(n\, \partial L / \partial p - L\, \partial L / \partial p - \rho L) + \\ + \gamma[{}^1\!/_2 (\partial L / \partial p)^2 + \rho\, \partial L / \partial p]. \end{aligned} \tag{16}$$

При произвольных α, β, γ его решение затруднительно, поэтому ограничимся рассмотренными выше частными случаями.

Случай A ($\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$) был изучен ранее в работах [2], поэтому укажем лишь, что из (14), (15), (16) при этом получается

$$f(t) = \frac{n(t)}{n(0)} = \frac{1}{1 + {}^1\!/_2 \alpha n(0) t}, \quad \nu_m = \frac{f^2}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} dp \frac{e^{mp} L_0(p)}{1 - ((1-f)/n_0) L_0(p)}, \tag{17}$$

где $L_0(p)$ — лапласовский образ начального спектра.

Случай B ($\beta \neq 0$, $\alpha = \gamma = 0$) рассматривался ранее В. С. Софроновым ([3]). Однако предложенное им формальное решение не позволяет в явном виде выразить ответ через начальный спектр при произвольной форме последнего. Приведенный ниже вывод свободен от этого недостатка. При $\alpha = \gamma = 0$ из (14) имеем

$$f(t) = n(t) / n(0) = \exp(-\beta \rho t), \tag{18}$$

и если вместо t, p и $L(p, t)$ ввести новые величины

$$x = 1 - f(t), \quad y = p\rho / n(0), \quad G(x, y) = 1 - [L(p, t) / n(t)], \tag{19}$$

то уравнение (16) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} G = G \frac{\partial}{\partial y} G, \tag{20}$$

причем $G(0, y) = G_0(y)$ можно считать заданным. Это уравнение имеет общее формальное решение $G = G_0(y + xG)$, однако лишь для немногих конкретных случаев отсюда можно выразить G через G_0.

Между тем из уравнения (20) следует $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (G^{k+1}/(k+1))$, и поэтому гораздо более эффективным оказывается представление решения (20) в виде ряда Тейлора:

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G\right]_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1!} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k G_0^{k+1}(y). \tag{21}$$

Подставляя $L(p, t) = n(t)\ (1 - G)$ в интеграл (15) и избавляясь от производных по $y = p\rho / n(0)$ путем интегрирования по частям, окончательно получим

$$\nu_m = \frac{\rho f / m}{1 - f} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} dp \exp\left[mp + m \frac{1 - f}{\rho} (L_0(p) - n(0))\right], \tag{22}$$

где $f = \exp(-\beta \rho t)$ (см. (18)), а $L_0(p)$ — образ начального спектра.

Случай C ($\gamma \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$). При этом из (14) имеем (ср. 11)

$$f(t) = n(t) / n(0) = 1 - (\gamma \rho^2 t / 2n(0)), \tag{23}$$

а для отыскания спектра применим тот же прием разложения в ряд Тейлора. Обозначив

$$x = \gamma \rho^2 t / n(0), \quad y = p\rho / n(0), \quad G(x, y) = y + {}^1\!/_2 x + (L(p, t) / n(0)), \tag{24}$$

перепишем уравнение (16) при $\alpha = \beta = 0$ в виде $\frac{\partial}{\partial x} G = {}^1\!/_2 \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2$, откуда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-1} \left[\frac{1}{k+1} \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{k+1}\right]. \tag{25}$$

Считая $G(0, y) = G_0(y)$ заданным, находим

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G\right]_{x=0} = G_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-1} \left(\frac{\partial G_0(y)}{\partial y}\right)^{k+1}, \tag{26}$$

и поскольку $L(p, t) = n(0)(G - y - {}^1\!/_2 x)$, для спектра получим

$$\nu_m = \frac{1}{m^2 \gamma t} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} dp \exp\left[mp - m\gamma t\left(\rho + \frac{\partial L_0(p)}{\partial p}\right)\right]. \tag{27}$$

При начальном спектре $\nu_m(0) = n(0)\delta(m - m_1)$ (27) переходит в (11).

3. Представляет интерес рассмотрение асимптотических спектров, когда можно пользоваться разложением начального образа по p:

$$L_0(p) = \int_0^\infty e^{-mp} \nu_m(0)\, dm = n(0)\, [1 - \langle m \rangle_0 p + {}^1/_2 \langle m^2 \rangle_0 p^2 - \ldots], \tag{28}$$

где $\langle m_k \rangle_0$ — среднее по начальному распределению.

Для случая А, удержав в (28) два первых члена, имеем полюс знаменателя (17) в точке $p_0 = -n(t) / \rho$, вычет в котором дает асимптотику

$$\nu_m \left(t \gg \frac{2}{an_0}\right) \approx \frac{n^2(t)}{\rho} \exp\left(-m \frac{n(t)}{\rho}\right), \tag{29}$$

где $n(t)$ определяется формулой (17). В случае В, удерживая в (28) три первых члена и вычисляя интеграл (22) по методу перевала, находим асимптотический спектр ($n(t)$ и f из (18))

$$\nu_m \left(t \gg \frac{1}{\beta\rho}\right) \approx \frac{n(t)}{\sqrt{2\pi \langle m^2 \rangle_0}} \left(\frac{\langle m \rangle_0}{m}\right)^{3/2} \exp\left(-m \frac{f^2 \langle m \rangle_0}{2 \langle m^2 \rangle_0}\right), \tag{30}$$

который полностью определяется заданием лишь величин $\langle m \rangle_0$ и $\langle m^2 \rangle_0$ и на начальном участке $\langle m \rangle_0 \leqslant m \leqslant 2\langle m^2 \rangle_0 / \langle m \rangle_0 f^2$ ведет себя как $\sim m^{-3/2}$ независимо от вида начального спектра (ср. также (10)).

В работе [3] модель В была предложена для описания процесса слипания частиц космической пыли, и указано, что зависимость $\sim m^{-3/2}$ находится в качественном согласии со спектром масс малых тел Солнечной системы — метеоров, комет и астероидов. Однако там не были получены общие формулы (22) и (30), а рассмотрен, по существу, лишь конкретный пример $\nu_m(0) = ae^{-bm}$, для которого $G_0(y) = y / (1 + y)$, и решение (20) в виде $G = G_0(y + xG)$ позволяет сравнительно просто найти G, что приводит к результату с функцией Бесселя

$$\nu_m = \frac{n(t)}{m\sqrt{1-f}} e^{-bm(2-f)} I_1 (2bm \sqrt{1-f}) \quad (\sim m^{-3/2} \text{ при } bm \gg 1), \tag{31}$$

который из нашей формулы (22) получается непосредственно подстановкой для данного случая $L_0(p) = a / (p + b)$ с последующей заменой переменных $p = b(z\sqrt{1-f} - 1)$. В работе [3] универсальность асимптотической зависимости $\sim m^{-3/2}$ устанавливается путем анализа тенденции изменения степенных спектров $\nu_m(0) \sim m^{-q}$, однако такой метод не позволяет определить вид экспоненциального обрывающего множителя формулы (30).

В случае С, который представляет, по-видимому, лишь математический интерес, частицы слипаются за конечное время, так что асимптотический спектр отсутствует.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова
Москва

Поступило
10 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Смолуховский, Phys. Zs., 17, 557, 585 (1916); в сборн. статей А. Эйнштейна, М. Смолуховского, Броуновское движение, 1936, стр. 403. [2] T. Schumann, Quart. J. Roy. Math. Soc., 66, № 285, 195 (1940); С. В. Пшенай-Северин, ДАН, 94, 865 (1954); Z. Melzak, Quart. Appl. Math., 11, № 2, 231 (1953). [3] В. С. Сафронов, Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет, «Наука», 1969, стр. 112; ДАН, 147, 64 (1962).