Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 533-59 *ГИДРОМЕХАНИКА*

С. П. РАДЕВ

ВИДОИЗМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ТИПА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 29 III 1971)

1. Методом Чепмена — Энскога можно построить функцию распределения, соответствующую состоянию газа, описываемого уравнениями Навье — Стокса. В случае больших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}\to\infty$ эти уравнения имеют предельное решение, характеризующее течение газа в пограничном слое Прандтля.

В настоящей работе предложены некоторые изменения метода Чепмена — Энскога, которые, сохраняя его основное идейное содержание, приводят к построению функции распределения в нулевом приближении, соответствующей пограничному слою Прандтля. Найдено также первое приближение функции распределения, которое соответствует пограничному слою для уравнений Барнетта ([3]). Основная идея заключается в применении преобразования Мизеса непосредственно к уравнению Больцмана.

В рамках уравнения BGK подобные исследования проводились в ([1]), где найденная функция распределения соответствует нашему нулевому приближению, и в ([2]), где применялся метод Гильберта. Некоторые общие выводы о применении обоих методов, вытекающие из ([1]) и ([2]), сделаны в ([3]), где, кроме того, методом Гильберта из линейного уравнения Больцмана получены линеаризованные уравнения Стокса и Озеена.

2. Для простоты изложим видоизмененный метод Чепмена — Энскога применительно к пластинке, расположенной вдоль оси Ox. Уравнение Больцмана в плоском случае имеет безразмерный вид *

$$\theta\,(\partial f/\partial t + u\,\partial f/\partial x) + \sqrt{\theta}\,v\,\partial f/\partial y = \int (f'f_1' - ff_1)\,gb\,db\,d\varepsilon\,d\mathbf{c}_1. \qquad (1)$$

Переход к безразмерным параметрам в уравнении Больцмана и уравнениях сохранения выполняется при помощи следующих характерных величин: b_0 — характерный линейный размер сечения столкновений молекул, L, $L\sqrt{\theta}$ — характерные продольный и поперечный размеры задачи, n_∞, T_∞ — плотность и температура газа в невозмущенном потоке, $c_\infty^2 = 2kT_\infty/m$ — характерная тепловая скорость молекул, $\theta = 1/(n_\infty b_0^2 L)$ — число Кнудсена.

Безразмерные микроскопические признаки макроскопических величин n, u_0, v_0, T, p_{xx}, p_{xy}, p_{yy}, q_x, q_y соответственно равны 1, u, $v/\sqrt{\theta}$, $2C^2/3$, $n(u-u_0)^2$, $n(u-u_0)(v-\sqrt{\theta}v_0)/\sqrt{\theta}$, $n(v-\sqrt{\theta}v_0)^2$, $nC^2(u-u_0)/2$, $nC^2(v-\sqrt{\theta}v_0)/2\sqrt{\theta}$, где $C^2 \equiv (u-u_0)^2 + (v-\sqrt{\theta}v_0)^2 + w^2$.

Пусть $\varphi(\mathbf{c}, x, y, \sqrt{\theta}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\theta})^k\, {}_k\varphi^k\ (\mathbf{c}, x, y)$ — микроскопический признак. Определим $\overline{\varphi^{(k)}}$ при помощи соотношения

$$\overline{\varphi} \equiv \frac{1}{n}\int \varphi f\,d\mathbf{c} = \frac{1}{n}\int \varphi^{(0)} f^{(0)} d\mathbf{c} + \sqrt{\theta}\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\theta})^k\,\overline{\varphi^{(k)}}. \qquad (2)$$

Пусть $G = G(\mathbf{c}, n, u_0, v_0, T, \partial n/\partial x, \ldots, \partial T/\partial y, \ldots)$ — некоторая функция молекулярных скоростей и переменных n, u_0, v_0, T, $\partial n/\partial x, \ldots$ $\ldots, \partial T/\partial y, \ldots$ **, а $M = (1/n)\int \varphi G\,d\mathbf{c}$.

* По поводу использованных обозначений см. ([4]).

** В дальнейшем конечный набор переменных n, u_0, v_0, T, $\partial n/\partial x, \ldots, \partial T/\partial y, \ldots$ будем обозначать через μ.

С G и M удобно связать следующие функции μ:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial\,\partial n/\partial x}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+\cdots \tag{3}$$

и аналогично для $\partial M/\partial x$, $\partial G/\partial y$, $\partial M/\partial y$.

3. Будем считать газ слабо разреженным, $\theta \ll 1$, и искать решение (1) в виде

$$f=f^{(0)}\sqrt{\theta}+\sum_{k=0}^{\infty}(\sqrt{\theta})^k F^{(k)}(\mathbf{c},\mu), \tag{4}$$

где $f^{(0)}=[n/(\pi T)^{3/2}]\exp\{-\frac{1}{T}[(u-u_0)^2+v^2+w^2]\}$, а $F^{(k)}(\mathbf{c},\mu)$ — искомые функции переменных μ и $\mathbf{c}$.

От членов ряда (4) потребуем выполнения условий

$$\int F^{(k)}d\mathbf{c}=\int uF^{(k)}d\mathbf{c}=0,\quad k\geqslant 0;\quad \int vF^{(0)}d\mathbf{c}=nv_0,\quad \int vF^{(k)}d\mathbf{c}=0,\quad k\geqslant 1;$$
$$\int C_0^2F^{(0)}d\mathbf{c}=0,\quad \int C_0^2F^{(1)}d\mathbf{c}=nv_0^2,\quad \int C_0^2F^{(k)}d\mathbf{c}=0,\quad k\geqslant 2, \tag{5}$$

где $C_0^2=(u-u_0)^2+v^2+w^2$.

При помощи (2) и (3) для f из (4) запишем (пока формально) безразмерные уравнения сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}n=\sum_{k=0}^{r}(\sqrt{\theta})^k\frac{\partial_k n}{\partial t},\quad \frac{\partial}{\partial t}u_0=\sum_{k=0}^{r}(\sqrt{\theta})^k\frac{\partial_k u_0}{\partial t},$$
$$\theta\frac{\partial}{\partial t}v_0=\sum_{k=0}^{r+1}(\sqrt{\theta})^k\frac{\partial_k v_0}{\partial t},\quad \frac{\partial}{\partial t}T=\sum_{k=0}^{r}(\sqrt{\theta})^k\frac{\partial_k T}{\partial t}, \tag{6}$$

где $r=\infty$.

В (6) использованы следующие функции μ:

$$\frac{\partial_0 n}{\partial t}\equiv-\left[\frac{\partial(nu_0)}{\partial x}+\frac{\partial(nv_0)}{\partial y}\right],\quad \frac{\partial_k n}{\partial t}\equiv 0,\quad k\geqslant 1;$$
$$\frac{\partial_0 u_0}{\partial t}\equiv-\left[u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{1}{2n}\frac{\partial(nT)}{\partial y}+\frac{1}{n}\frac{\partial p_{xy}^{(0)}}{\partial y}\right],$$
$$\frac{\partial_k u_0}{\partial t}\equiv-\frac{1}{n}\left(\frac{\partial p_{xx}^{(k-1)}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}^{(k)}}{\partial y}\right),\quad k\geqslant 1;$$
$$\frac{\partial_0 v_0}{\partial t}\equiv-\frac{1}{2n}\frac{\partial(nT)}{\partial y},\quad \frac{\partial_1 v_0}{\partial t}\equiv-\frac{1}{n}\frac{\partial p_{yy}^{(0)}}{\partial y},$$
$$\frac{\partial_2 v_0}{\partial t}\equiv-\left[u_0\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{n}\left(\frac{\partial p_{xy}^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}^{(1)}}{\partial y}\right)\right],$$
$$\frac{\partial_k v_0}{\partial t}\equiv-\frac{1}{n}\left(\frac{\partial p_{xy}^{(k-2)}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}^{(k-1)}}{\partial y}\right),\quad k\geqslant 3;]$$
$$\frac{\partial_0 T}{\partial t}\equiv-\left\{u_0\frac{\partial T}{\partial x}+v_0\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{4}{3}\frac{1}{n}\left[\frac{nT}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+p_{xy}^{(0)}\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial q_y^{(1)}}{\partial y}\right]\right\},$$
$$\frac{\partial_1 T}{\partial t}\equiv-\frac{4}{3}\frac{1}{n}\left[p_{xx}^{(0)}\frac{\partial u_0}{\partial x}+p_{xy}^{(1)}\frac{\partial u_0}{\partial y}+p_{yy}^{(0)}\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial q_x^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial q_y^{(1)}}{\partial y}\right],$$
$$\frac{\partial_k T}{\partial t}\equiv-\frac{4}{3}\frac{1}{n}\left[p_{xx}^{(k-1)}\frac{\partial u_0}{\partial x}+p_{xy}^{(k)}\frac{\partial u_0}{\partial y}+p_{xy}^{(k-2)}\frac{\partial v_0}{\partial x}+p_{yy}^{(k-1)}\frac{\partial v_0}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial q_x^{(k-1)}}{\partial x}+\frac{\partial q_y^{(k)}}{\partial y}\right],\quad k\geqslant 2. \tag{7}$$

Если ряд (4) оборвать на N-м члене $F^{(N)}$ (у нас $N=0,1$), то в (6) следует положить $r=N$.

Полная постановка задачи о построении функции распределения типа пограничного слоя формулируется следующим образом: найти решение (1) в виде асимптотического ряда (4), в котором переменные из набора μ заменены функциями $n(x, y, t)$, $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $T(x, y, t)$ (и их пространственными производными), определенными из решения (6).

4. Введем в рассмотрение функции переменных μ:

$$\frac{\partial_k G}{\partial t} = \left(\frac{\partial G}{\partial v_0} \frac{\partial_k v_0}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial(\partial v_0/\partial x)} \frac{\partial(\partial_k v_0/\partial t)}{\partial x} + \cdots \right) +$$

$$+ \frac{\partial G}{\partial n} \frac{\partial_{k-2} n}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial u_0} \frac{\partial_{k-2} u_0}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial T} \frac{\partial_{k-2} T}{\partial t} + \cdots, \tag{8}$$

где для $k = 0, 1$ в (8) следует считать отличным от нуля только член в скобках.

С учетом (8) можно написать

$$\theta \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{c}, x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\theta})^k \frac{\partial_k G}{\partial t} (\mathbf{c}, x, y, t). \tag{9}$$

Подставляя (4) в (1) и собирая члены с одинаковыми степенями $\sqrt{\theta}$, для определения $F^{(k)}(\mathbf{c}, \mu)$ получим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$D^{(k)} = J^{(k)}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

$$J^{(k)} = \int \Big\{ [f^{(0)\prime} F_1^{(k)\prime} + f_1^{(0)\prime} F^{(k)\prime} - f^{(0)} F_1^{(k)} - f_1^{(0)} F^{(k)}] +$$

$$+ \sum_{i,j=0}^{j+l=k-1} [F^{(l)\prime} F_1^{(j)\prime} - F^{(l)} F_1^{(j)}] \Big\} gb\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{c}_1 \tag{11}$$

(при $k = 0$ второй член считается равным нулю);

$$D^{(0)} \equiv \partial_0 F^{(0)} / \partial t + v\, \partial f^{(0)} / \partial y, \quad D^{(1)} \equiv \partial_0 F^{(1)} / \partial t + \partial_1 F^{(0)} / \partial t + \partial_2 f^{(0)} / \partial t +$$

$$+ u\, \partial f^{(0)} / \partial x + v\, \partial F^{(0)} / \partial y, \quad D^{(k)} \equiv \partial_0 F^{(k)} / \partial t + \partial_1 F^{(k-1)} / \partial t + \ldots \tag{12}$$

$$\ldots + \partial_k F^{(0)} / \partial t + \partial_{k+1} f^{(0)} / \partial t + u\, \partial F^{(k-2)} / \partial x + v\, \partial F^{(x-1)} / \partial y, \quad k \geqslant 2.$$

В случае $k = 0$ решение (11) имеет вид полинома первой степени по v_0 с коэффициентами, не зависящими от v_0, $\partial v_0 / \partial x$, $\partial v_0 / \partial y, \ldots$, т. е. $F^{(0)} = f^{(0)}(\overline{\Phi}^{(0)} + A^{(0)} v_0)$. Уравнение для $A^{(0)}$ решается очевидным образом: $A^{(0)} = (2/T) v$, а решение уравнения для $\overline{\Phi}^{(0)}$

$$I(\overline{\Phi}^{(0)}) = f^{(0)} \Big\{ \frac{1}{2n} \frac{\partial (nT)}{\partial y} A^{(0)} - v \Big[\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \Big(\frac{1}{T} C_0^2 - \frac{3}{2} \Big) +$$

$$+ \frac{2}{T} \frac{\partial u_0}{\partial y} (u - u_0) \Big] \Big\} \tag{13}$$

можно найти в (4) *;

$$I(G) \equiv \int f^{(0)} f_1^{(0)} (G + G_1 - G' - G_1') gb\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{c}_1; \tag{14}$$

$$F^{(0)} = f^{(0)} \Big[\frac{2v_0}{T} - \frac{a_1}{n} \frac{\partial \ln T}{\partial y} \Big(\frac{1}{T} C_0^2 - \frac{5}{2} \Big) - \frac{b_1}{n} \frac{2}{T} \frac{\partial u_0}{\partial y} (u - u_0) \Big] v. \tag{15}$$

Параметры в функции распределения нулевого приближения f_0 ($f_0 = f^{(0)} + \sqrt{\theta} F^{(0)}$) определяются из уравнений Прандтля.

В случае $k = 1$ решение (10) имеет вид

$$F^{(1)} = f^{(0)} \Big[\overline{\Phi}^{(1)} + A_1^{(1)} v_0 + A_2^{(1)} v_0^2 + A_3^{(1)} \frac{\partial v_0}{\partial y} \Big] \equiv f^{(0)} \Phi^{(1)}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (11) и сравнивая члены с одинаковыми степенями v_0, $\partial v_0 / \partial y$, для независящих от v_0, $\partial v_0 / \partial y$ коэффициентов $\overline{\Phi}^{(1)}$, $A_1^{(1)}$ $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$ получим систему 4 интегральных уравнений с интегральным оператором I из (14); для этой системы достаточные условия разрешимо-

* Конкретные вычисления $F^{(k)}$ проводятся для максвелловских молекул.

сти оказываются автоматически выполненными, а их решение можно находить методом разложения по полиномам Сонина ([5]).

Как указано в ([4]), при вычислении добавок к тензору напряжений и вектору теплового потока можно обойтись без знания конкретного вида $A_i^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$, так как, например,

$$p_{yy}^{(1)} = -\frac{2}{3}nv_0^2 + \frac{b_1}{n}\int v^2 I(\Phi^{(1)})\,d\mathbf{c} = -\frac{2}{3}b_1 T\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{b_1}{3}T\frac{\partial u_0}{\partial x} -$$
$$-\frac{2}{3}b_1^2\frac{T}{n}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{nT}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right\} + \frac{a_1 b_1}{3}\frac{T}{n}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]; \quad (17)$$

аналогично

$$p_{xy}^{(1)} = q_y^{(1)} = 0.$$

Параметры n, u_0, v_0, T в f_1 ($f_1 \equiv f^{(0)} + \sqrt{\theta}F^{(0)} + \theta F^{(1)}$ — функция распределения первого приближения) находятся из системы (6), которая в рассматриваемом случае имеет вид ($r = 1$)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu_0) + \frac{\partial}{\partial y}(nv_0) = 0,$$
$$n\frac{\partial u_0}{\partial t} + nu_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + nv_0\frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{nT}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1}{2}T\frac{\partial u_0}{\partial y}\right),$$
$$\theta\left(n\frac{\partial v_0}{\partial t} + nu_0\frac{\partial v_0}{\partial x} + nv_0\frac{\partial v_0}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{nT}{2}\right) + \theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_1}{2}T\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - \theta\frac{\partial p_{yy}^{(1)}}{\partial y}, \quad (18)$$
$$n\frac{\partial T}{\partial t} + nu_0\frac{\partial T}{\partial x} + nv_0\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{4}{3}\left[\frac{nT}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) -\right.$$
$$\left. -\frac{b_1}{2}T\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 - \frac{5}{8}a_1\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right].$$

Полученные уравнения (18) описывают течение газа в пограничном слое толщины $O(\sqrt{\theta})$, который можно выделить для уравнений Барнетта ([5]). Вне этого слоя справедливы уравнения Эйлера.

5. Уравнения (18) при $\theta = 0$ переходят в уравнения Прандтля.

Из соображений, подобных тем, которые приводят к уравнениям Прандтля (если исходить из уравнений Навье — Стокса) следует ожидать, что внутри пограничного слоя толщины $O(\sqrt{\theta})$, описываемого системой (18), содержится тонкий подслой толщины $O(\theta)$. Его существование связано с тем, что для уравнений (18) выставляются граничные условия, отличные от граничных условий для уравнений Прандтля. Предположение о существовании подслоя толщины $O(\theta)$ приводит к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x}(nu_0) + \frac{\partial}{\partial y}(nv_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1}{2}T\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{nT}{2}\right) +$$
$$+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{2}{3}b_1^2\frac{T}{n}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{nT}{2}\right)\right) + {}^1/_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{a_1 b_1}{3}\frac{T}{n}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]\right\} = 0, \quad \frac{5}{8}a_1\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{b_1}{2}T\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 = 0. \quad (19)$$

Таким образом, мы выделили три характерные области течения газа. Вне слоя толщины $O(\sqrt{\theta})$ течение описывается уравнениями Эйлера. В слое толщины $O(\sqrt{\theta})$, исключая пристеночную область толщины $O(\theta)$, действуют уравнения Прандтля. В примыкающей к границе обтекаемого тела слое толщины $O(\theta)$ течение описывается уравнениями (19).

Автор выражает глубокую признательность С. В. Валландеру за постановку задачи, руководство и постоянное внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
11 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. K. Chi, Phys. Fluids, 8, № 5, 991 (1965). [2] L. Trilling, Phys. Fluids, 7, № 10, 1681 (1964). [3] H. Grad, Transport Theory, SIAM — AMS Proceedings, I, 1969. [4] С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960. [5] D. Burnett, Proc. Lond. Math. Soc., 40, 382 (1935).