Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 517.946:531.26 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Н. СТРАХОВ

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ КОНТАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым, 25 III 1971)

Достаточно важный класс обратных задач теории потенциала возникает при изучении плотностных границ раздела в земной коре. Эти задачи принято называть структурными. Настоящая работа посвящена изучению (в двухмерной постановке) простейшей из структурных задач — задачи о контактной поверхности (контактной называется поверхность раздела двух сред постоянной плотности).

Определение. Простую (без точек самопересечения) бесконечную жорданову кривую Γ будем называть кривой класса K_0, если:

1) функция $z(x)$ в уравнении $z = z(x)$ этой кривой удовлетворяет условиям

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} z(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} z(x) = h, \quad |h| < +\infty;$ (1)

б) $|z(x) - h| = O(1/x^2)$; $\;|x|\to\infty$ (2)

в) $\operatorname{mes}[x;\, z(x) = h] = 0;$ (3)

2) функция $\psi(t) = at + ih + \theta(t)$, реализующая конформное и однолистное отображение полуплоскости $\nu = \operatorname{Im} t < 0$ на полуплоскость P_- под кривой Γ, удовлетворяет условию

г) $|\theta(t)| = O(1/|t|), \quad \operatorname{Im} t = \nu \leqslant 0.$ $\;|t|\to\infty$ (4)

Ниже предполагается, что граница Γ раздела сред P_+ (над кривой Γ) и P_- (с плотностями δ_1 и δ_2 соответственно и со скачком плотности $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$ на границе) принадлежит классу K_0.

Комплексная напряженность аномального гравитационного поля контактной кривой $\Gamma \in K_0$ дается соотношением [1]

$$G(s) = g_z(x, z) + ig_x(x, z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{2\pi i f\Delta\delta\,(\sigma - \bar{\sigma} - 2ih)}{\sigma - s}\,d\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{4\pi f\Delta\delta\Delta z(\sigma)}{\sigma - s}\,d\sigma. \tag{5}$$

Здесь f — гравитационная постоянная, g_x и g_z — составляющие напряженности поля по осям координат, $\Delta z(\sigma)$ — величина превышения точки $\sigma \in \Gamma$ над асимптотой к этой кривой.

Из (5) следует, что функция $G(s)$ является кусочно-аналитической; аналитическая в P_+ функция $G^+(s)$ и представляет комплексную напряженность внешнего (аномального) гравитационного поля контактной кривой $\Gamma \in K_0$.

Обратную задачу для контактной кривой $\Gamma \in K_0$ будем трактовать как задачу нахождения этой кривой и скачка плотности $\Delta\delta$ по функции $G^+(s)$. Следуя М. Б. Рапопорту [2] и В. К. Иванову [3], задачу нахождения Γ будем рассматривать как задачу нахождения функции $\psi(t)$.

Решение обратной задачи для контактной поверхности является существенно неоднозначным.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma_{a,r}$ — семейство границ раздела сред с уравнениями*

$$(\zeta-(a-r))(\xi^2+(\zeta+r)^2)=2r(\zeta+r)^2,$$
$$0<a<+\infty,\quad -{}^1/_2a<r<+\infty \tag{6}$$

(это уравнения так называемых конхонд Слюза [4]*). Пусть*

$$m=\Delta\delta\pi r(2a+r). \tag{7}$$

Тогда

1° *любые две границы раздела $\Gamma_{a,r}$ с одним и тем же значением m создают тождественные внешние поля;*

2° *внешние поля границ раздела $\Gamma_{a,r}$ эквивалентны полю точечного источника массы m в начале координат.*

Доказательство. Полагая $\sigma=\xi+i\zeta$, $\bar\sigma=\xi-i\zeta$, из уравнения (6) находим (в рассматриваемом случае $h=a-r$)

$$\Delta z(\sigma)=\frac{\sigma^2-2i\sigma(a-r)-r(2a+r)+(\sigma+ir)\sqrt{(\sigma-i(2a+r))^2+4ir\sigma}}{2\sigma\cdot 2i}. \tag{8}$$

Подставляя $\Delta z(\sigma)$ в (5) и вычисляя интеграл по теореме о вычетах, получаем

$$G^+(s)=-2\pi if\Delta\delta r(2a+r)/s=-2ifm/s. \tag{9}$$

Теорема доказана.

Следствие. *Для единственности решения обратной задачи в классе контактных кривых $\Gamma\in K_0$ необходимо задание скачка плотности $\Delta\delta$ и уравнения асимптоты $z=h$ или другой эквивалентной информации.*

Замечание 1. При $a>0$, $r>0$ кривые $\Gamma_{a,r}$ располагаются целиком выше своих асимптот, при $a>0$, $-{}^1/_2a<r<0$ — целиком ниже. Если $a>0$, $r>0$, то при $a\to0$ кривые $\Gamma_{a,r}$ стремятся к предельной кривой — кругу $\xi^2+\zeta^2=r^2$; если $a>0$, $r<0$, то при $r\to-{}^1/_2a$ кривые $\Gamma_{a,r}$ стремятся к предельной кривой — циссоиде Диоклеса. Эквивалентность внешних полей для контактных кривых $\Gamma_{a,r}$, $a>0$, $r>0$, и Γ_{a_1,r_1}, $a_1>0$, $r_1<0$, может иметь место лишь при значениях скачков плотности, противоположных по знаку.

Замечание 2. Эквивалентные по внешнему полю контактные кривые могут пересекаться.

Замечание 3. Положение центра аномальных масс (между кривой $\Gamma_{a,r}$ и ее асимптотой) не определяется по внешнему полю однозначно.

Из теоремы 1 следует, что внешние поля контактных кривых класса K_0 могут быть эквивалентны полям одородных распределений масс в некоторой ограниченной области. Подобная эквивалентность является типичной для внешних полей контактных кривых.

Следуя идеям В. К. Иванова [3], построим интегральное уравнение обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma\in K_0$ и пусть*

$$\psi^*(t)=\overline{\psi(\bar t)},\quad \theta^*(t)=\overline{\theta(\bar t)}, \tag{10}$$

$\psi^{-1}(s)$ — функция, обратная к $\psi(t)$.

Тогда имеет место пара взаимно обратных соотношений

$$G^+(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{[-2\pi if\Delta\delta\theta^*(\psi^{-1}(\sigma))]}{\sigma-s}d\sigma,\quad s\in P_+,$$
$$-2\pi if\Delta\delta\theta^*(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{G^+(\psi(\mu))}{\mu-t}d\mu,\quad \nu>0. \tag{11}$$

Доказательство. Первое из соотношений (11) следует из (5), так как при $\sigma \in \Gamma$

$$\sigma - \bar{\sigma} - 2ih = \psi(\mu) - \overline{\psi(\mu)} - 2ih = \theta(\mu) - \theta^*(\mu) = \\ = \theta(\psi^{-1}(\sigma)) - \theta^*(\psi^{-1}(\sigma))$$

и в силу аналитичности $\theta(\psi^{-1}(\sigma))$ в P_-

$$\int_\Gamma \frac{\theta(\psi^{-1}(\sigma))}{\sigma - s} d\sigma = 0.$$

Для доказательства второго из соотношений (11) заметим, что в силу теории граничных значений интегралов типа Коши на Γ имеет место соотношение ($G^-(s)$ — значения интеграла в P_-):

$$G^+(\sigma) - G^-(\sigma) = G^+(\psi(\mu)) - G^-(\psi(\mu)) = \\ = 2\pi i f \Delta\delta(\sigma - \bar{\sigma} - 2ih) = 2\pi i f \Delta\delta(\theta(\mu) - \theta^*(\mu)). \qquad (12)$$

Применяя к обеим частям (12) интегральную формулу Коши для верхней полуплоскости и учитывая, что в силу аналитичности $G^-(s)$ в P_- и $\psi(t)$ в нижней полуплоскости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^-(\psi(\mu))}{\mu - t} d\mu = 0,$$

получаем требуемый результат.

На основании (11) получаются следующие результаты (методами В. К. Иванова ([3], [5])).

Теорема 3. *Для того чтобы внешнее гравитационное поле границы раздела $\Gamma \in K_0$ было эквивалентно полю некоторого однородного распределения масс по конечной односвязной области $\mathcal{D}$, ограниченной простой спрямляемой жордановой кривой G, необходимо и достаточно, чтобы функция $G^+(s)$ была регулярна на бесконечности.*

Теорема 4. *Для указанной в теореме 3 эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы функция $\theta(t) = \psi(t) - at - ih$ была регулярна на бесконечности.*

Большой интерес представляет проблема нахождения условий, в которых внешнее поле контактной поверхности оказывается эквивалентным полю от нескольких конечных односвязных областей $\mathcal{D}_i$, заполненных массами постоянной (быть может, различной) плотности. Если не требовать, чтобы области $\mathcal{D}_i$ попарно не пересекались, найти достаточно общие условия нетрудно.

Теорема 5. *Пусть функция $\theta(t)$ представима в виде*

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(t), \qquad (13)$$

а каждая из аналитических в $\nu = \operatorname{Im} t < 0$ функций

$$g_i(t) = 2\pi i f \Delta\delta\theta_i(t) \qquad (14)$$

представляет собой комплексную напряженность гравитационного поля от некоторого распределения масс (быть может, неоднородного) по конечной области Σ_i. Пусть далее все $\theta_i(\psi^{-1}(\sigma))$ непрерывны и удовлетворяют на Γ условию Липшица. Положим $\theta_i^*(t) = \overline{\theta_i^*(\bar{t})}$, $\bar{g}_i(t) = -\overline{g_i(\bar{t})} = -2\pi i f \Delta\delta\theta_i^*(t)$.

Тогда

1° *комплексная напряженность* $G^+(s)$ *внешнего аномального гравитационного поля контактной кривой* Γ *представима в виде*

$$G^+(s) = \sum_{i=1}^{n} G_i^+(s). \tag{15}$$

где функции $G_i^+(s)$ *связаны с* $g_i(t)$ *взаимно-обратными соотношениями*

$$G_i^+(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_i(\psi^{-1}(\sigma))}{\sigma - s}\,d\sigma, \quad s \in P_+, \tag{16}$$

$$g_i(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i^+(\psi(\mu))}{\mu - t}\,d\mu, \quad \nu > 0,$$

2° *каждая из функций* $G_i^+(s)$ *регулярна на бесконечности,* $Y_i(\infty) = 0$.

Если вдобавок для всех i $\operatorname{Res}[G_i^+(s)]_{s=\infty}$ *есть чисто вещественное число, то каждая из* $G_i^+(s)$ *представляет собой комплексную напряженность гравитационного поля масс, распределенных с постоянной плотностью* (δ_i) *по некоторой конечной односвязной области* $\mathcal{D}_i$, *ограниченной простой замкнутой жордановой кривой* L_i.

Автор благодарен В. К. Иванову за полезное обсуждение работы и советы.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Страхов, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 12 (1970). [2] И. М. Рапопорт, ДАН, 28, № 4 (1940). [3] В. К. Иванов, ДАН, 105, № 3 (1955). [4] А. С. Смогоржевский, Е. С. Столова, Справочник по теории плоских алгебраических кривых третьего порядка, 1961. [5] В. К. Иванов, Матем. сборн., нов. сер., 40, 3 (1956).