Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 1

УДК 517.916 *МАТЕМАТИКА*

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛУТРАЕКТОРИИ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ ПЛОСКОСТИ, СОХРАНЯЮЩЕМ ПЛОЩАДЬ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 VI 1971)

1. Пусть T — аналитическое отображение окрестности точки O плоскости, сохраняющее площадь и оставляющее O на месте. T называется отображением общего эллиптического типа, если его линейная часть в точке O есть поворот и если в его нормальной форме в смысле Биркгофа ([1], [2]):

$$\varphi' = \varphi + \omega_0 + \omega_1\tau + \ldots, \quad \tau' = \tau,$$

коэффициент $\omega_1 \neq 0$ (здесь φ, τ — полярные координаты).

Биркгофом поставлена следующая проблема ([1], [4]): будет ли неподвижная точка устойчива, если T — преобразование общего эллиптического типа? Положительный ответ на этот вопрос был впервые дан В. И. Арнольдом в ([5]). Ю. Мозер показал, что условие аналитичности можно заменить достаточно большой гладкостью ([6]). В настоящей работе рассматривается обобщение результата В. И. Арнольда на случай, когда вместо окрестности неподвижной точки речь идет об окрестности полутраектории.

2. Пусть A — аналитическое отображение плоскости, сохраняющее площадь. Пусть

$$\gamma = \{(p_0, q_0), (p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n), \ldots\}$$

— полутраектория A, т. е. $A(p_i, q_i) = (p_{i+1}, q_{i+1})$.

Введем последовательность преобразований A_i, с помощью следующего условия: для любой точки $\beta = (\tilde{p}, \tilde{q})$ такой, что

$$\beta - (p_i, q_i) \in U_{\varepsilon_0} = \{p, q: \max(|p|, |q|) \leqslant \varepsilon_0\},$$
$$A(\tilde{p}, \tilde{q}) = (p_{i+1}, q_{i+1}) + A_{i+1}(\tilde{p} - p_i, \tilde{q} - q_i)$$

($\varepsilon_0 > 0$, сложение точек покоординатное).

Из определения следует, что при всех i A_i — аналитическое отображение окрестности нуля, сохраняющее площадь, и нуль — неподвижная точка.

Будем говорить, что отображение A в окрестности полутраектории γ удовлетворяет условию (M), если:

1) при $i = 1, 2, \ldots$ A_i определено в комплексной окрестности $U_{\varepsilon_0}^* = \{p, q: \max(|p|, |q|) \leqslant \varepsilon_0\}$. В окрестности $U_{\varepsilon_0}^*$ последовательность преобразований A_i сходится к аналитическому преобразованию $A_\infty(p, q) = \lim\limits_{i\to\infty} A_i(p, q)$, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{p,\, q \in U_{\varepsilon_0}^*} |A_{i+1}(p, q) - A_i(p, q)| < \infty;$$

2) A_∞ — преобразование общего эллиптического типа (из определения A_∞ следует, что оно сохраняет площадь);

3) если $\overset{\infty}{\lambda} = e^{i\omega_0}$, $\overline{\lambda}$ — собственные значения линейной части преобразования A_∞ в нуле, то

$$\omega_0 \neq 2\pi m / n, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n; \quad n = 1, 2, \ldots, 262.$$

Теорема 1 (основная). *Если преобразование A в окрестности полутраектории γ удовлетворяет условию (M), то γ устойчива по Ляпунову.*

В частном случае, когда все преобразования A_i в условии (M) совпадают, теорема 1 есть следствие теоремы В. И. Арнольда ([5]).

3. Решающую роль в доказательстве теоремы 1 играет теорема 2. Прежде чем ее формулировать, введем обозначения. Для функций вида $f(x_1, \ldots, x_k)$, $g(x_1, \ldots, x_k; n)$, определенных в области $(x_1, \ldots, x_k) \in G$, $n = 1, 2, \ldots$, введем нормы

$$|f|_0 = \sup_{(x_1, \ldots, x_k) \in G} |f|,$$

$$\|g\| = |g(x_1, \ldots, x_k; 1)|_0 + \sum_{i=1}^{\infty} |g(x_1, \ldots, x_k; i+1) - g(x_1, \ldots, x_k; i)|_0.$$

Далее, если U — область в комплексном пространстве, то $\operatorname{Re} U$ — пересечение U с вещественным пространством. $\operatorname{mes} \Omega$ обозначает лебегову меру $\operatorname{Re} \Omega$.

Теорема 2. *Рассмотрим канонический по переменным x, y диффеоморфизм $A(x, y, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющий вид*

$$x' = x + \frac{\partial S}{\partial y'}(x, y', n), \quad y' = y - \frac{\partial S}{\partial x}(x, y', n),$$

$xy' + S(x, y', n)$ — производящая функция. Предположим, что

1) A определен в области F: $|\operatorname{Im} x| \leqslant \sigma$, $y \in G$, причем $\operatorname{Re} G$ — связное множество; A действителен при действительных значениях аргументов;

2) функция $S(x, y', n) = \overline{S}(y', n) + \widetilde{S}(x, y', n)$ аналитична в области $|\operatorname{Im} x| \leqslant \sigma$, $y' \in G$; $S(x + 2\pi, y', n) = S(x, y', n)$; $\oint \widetilde{S}\, dx = 0$; $\|\widetilde{S}\| < \delta$, где $\delta > 0$;

3) при $n = 1, 2, \ldots$ отображение $T(y', n): y' \to \dfrac{d\overline{S}}{dy'}(y', n)$ — диффеоморфизм области G; $T(G, n) \supseteq \Omega = \{\omega: |\operatorname{Re}(\omega - \overline{\omega})| < \varepsilon, |\operatorname{Im} \omega| < \varepsilon\}$, где $\operatorname{Im} \overline{\omega} = 0$; $T(\operatorname{Re} G, n) \supseteq \operatorname{Re} \Omega$; $\theta_1 \leqslant |dT / dy'| \leqslant \theta_2$; $\|dT / dy'\| \leqslant \theta_2$; $\|T\| \leqslant \theta_2$, $0 < \theta_1 < 1 < \theta_2 < \infty$;

4) при действительных y' знак $\dfrac{d^2\overline{S}}{dy'^2} = \dfrac{dT}{dy'}(y', n)$ не зависит от y', n;

5) $\varepsilon < 1/2$, $\delta^{1/64} < (1/32)^2 \varepsilon^2$, $\sigma > 61 \delta^{1/64}$, $\delta^{1/64} < 8^{-4}(|\overline{\omega}| + 2)^{-4}$.

Тогда для любого $\varkappa > 0$ существует $\delta^0 = \delta^0(\varkappa, \theta_1, \theta_2)$ такое, что если $\delta \leqslant \delta^0$, то

1) существует разложение $\operatorname{Re} \overline{\Omega} = \Omega^1 + \Omega^2$, где $\overline{\Omega} = \{\omega: |\operatorname{Re}(\omega - \overline{\omega})| \leqslant 0{,}5\varepsilon, |\operatorname{Im} \omega| \leqslant 0{,}5\varepsilon\} \subseteq \Omega$, что Ω^1 — замкнутое совершенное множество, а $\operatorname{mes} \Omega^2 \leqslant \varepsilon\varkappa$;

2) для любых $\omega \in \Omega^1$, n в области $\operatorname{Re} F$ существует замкнутая кривая, задаваемая уравнением $y = \psi(x, \omega, n)$ и инвариантная относительно преобразования $A(x, y, n)$;

3) функция $\psi(x, \omega, n)$ монотонно возрастает по ω, если $\dfrac{d^2\overline{S}}{dy'^2}(y', n) > 0$ (из условий 3), 4) следует, что она всегда знакопостоянна) и монотонно убывает по ω, если $\dfrac{d^2\overline{S}}{dy'^2}(y', n) < 0$;

4) $\|\psi\| < \infty$, $|\psi(x, \omega, n) - T^{-1}(\omega, n)| < \varkappa$, *где* $T^{-1} \circ T$ — *тождественное отображение;*

5) *для любых* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1$ $\omega_1 < \omega_2$ *при* $n = 1, 2, \ldots$, $|\omega_1 - \omega_2| - 2\theta_2 |\psi(x, \omega_1, n) - \psi(x, \omega_2, n)| + \operatorname{mes} \Delta(\omega_1, \omega_2)$, *где* $\Delta(\omega_1, \omega_2) = \Omega_2 \cap [\omega_1, \omega_2]$.

Эта теорема применяется к некоторым задачам классической механики. Например, с ее помощью можно доказать существование множества положительной меры траекторий, разгоняющихся по скорости до бесконечности, при столкновениях упругого шарика и бесконечно тяжелой плиты, которая движется по периодическому закону ([7]).

Инвариантные кривые $y = \psi(x, \omega, n)$ в теореме 2 строятся методом последовательных приближений ньютоновского типа, что аналогично ([3–6]), при этом ω оказывается числом вращения преобразования, индуцированного преобразованием $A(x, y, n)$ на кривой $y = \psi(x, \omega, n)$. Однако в отличие от этих работ здесь ньютоновский процесс проводится относительно нормы $\|\cdot\|$ (во всех известных автору случаях ньютоновские приближения строятся для нормы $\sup|f|$). Это позволяет доказать утверждение 4) теоремы 2. Доказательство утверждений 1), 3), 5) основано на детальном изучении множества инвариантных кривых преобразования $A(x, y, n)$ при каждом n.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Д. Биркгоф, Динамические системы, 1941. [2] К. Л. Зигель, Лекции по небесной механике, 1959. [3] А. Н. Колмогоров, ДАН, **98**, № 4, 527 (1954). [4] В. И. Арнольд, УМН, **18**, в. 6, 91 (1963). [5] В. И. Арнольд, ДАН, **137**, № 2, 255 (1961). [6] Ю. Мозер, Сборн. пер. Математика, **6**, в. 5, 51 (1962). [7] Л. Д. Пустыльников, УМН, **23**, в. 4, 251 (1968).