Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 1

УДК 519.53:513.83

МАТЕМАТИКА

Л. Я. САВЕЛЬЕВ

МЕРЫ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ КОЛЬЦАХ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 10 VI 1971)

В заметке рассматриваются меры, являющиеся аддитивными непрерывными отображениями топологических булевых колец в топологические абелевы полугруппы. Формулируются теоремы о суммировании и продолжении таких мер. Описываются некоторые частные случаи.

1. Определение меры. Условимся говорить, что полугруппа $(G, +)$ и топология $\mathscr{T}$ для множества G образуют топологическую полугруппу $(G, +, \mathscr{T})$, если и только если для каждого элемента $b \in G$ переносы $x \to x + b$, $x \to b + x$ множества G непрерывны. Будем называть топологическую полугруппу $(G, +, \mathscr{T})$ топологической группой, если и только если полугруппа $(G, +)$ является группой и симметрия $x \to -x$ множества G непрерывна. Скажем, что кольцо $(A, +, \cdot)$ и топология $\mathscr{S}$ для множества A образуют топологическое кольцо $(A, +, \cdot, \mathscr{S})$, если и только если $(A, +, \mathscr{S})$ является топологической группой, а $(A, \cdot, \mathscr{S})$ — топологической полугруппой.

Булевым кольцом $(A, +, \cdot)$ условимся называть ассоциативное кольцо $(A, +, \cdot)$, каждый элемент которого идемпотентен: $x \cdot x = x$ $(x \in \in A)$. Булевой алгеброй будем называть булево кольцо с единицей 1.

Абелевой полугруппой $(G, +)$ условимся называть коммутативную полугруппу $(G, +)$ с нулем 0. Операцию $+$ для абелевой полугруппы $(G, +)$ будем назвать сложением.

Отображение $m : A \to G$ булева кольца $(A, +, \cdot)$ в абелеву полугруппу $(G, +)$ условимся называть аддитивным, если и только если

1) $m(0) = 0$,

2) $m(x + y) = m(x) + m(y) \qquad (x \in A,\ y \in A : xy = 0)$.

Определение. Отображение $m : A \to G$ топологического булева кольца $(A, +, \cdot, \mathscr{S})$ в топологическую абелеву полугруппу $(G, +, \mathscr{T})$ называется мерой, если и только если m аддитивно и непрерывно.

Это определение является обобщением определения непрерывной меры, данного в [1].

2. Суммирование меры. Семейство (a_i) элементов кольца $(A, +, \cdot)$, значения которого для каждых двух различных индексов являются делителями нуля: $a_i a_j = 0$ $(i \neq j)$, условимся называть семейством делителей нуля.

Рассмотрим топологическое булево кольцо $(A, +, \cdot, \mathscr{S})$ и топологическую абелеву полугруппу $(G, +, \mathscr{T})$. Предположим, что топологические пространства $(A, \mathscr{S})$ и $(G, \mathscr{T})$ отделимы. Для каждой меры $m : A \to G$ верна

Теорема 1. *Если семейство (a_i) делителей нуля суммируемо в $(A, +, \cdot, \mathscr{S})$, то семейство $(m(a_i))$ суммируемо в $(G, +, \mathscr{T})$ и $m(\sum a) = \sum m(a_i)$.*

Теорема 1 и ее доказательство аналогичны теореме об образе суммируемого семейства при непрерывном отображении и ее доказательству ([2], гл. 3, § 5, предложение 5). Теорема 1 является обобщением предложения о счетной аддитивности непрерывной меры ([1], § 3, предложение 9; [3], § 1, предложение 1).

3. Продолжение меры. Рассмотрим топологическую булеву алгебру $(C, +, \cdot, \mathcal{S})$, топологические булевы кольца $(A, +_{A\times A}, \cdot_{A\times A}, A \cap \mathcal{S})$ и $(B, +_{B\times B}, \cdot_{B\times B}, B\cap\mathcal{S})$ такие, что $A \subseteq B \subseteq C$ и A плотно в B. Рассмотрим топологическую абелеву полугруппу $(G, +, \mathcal{T})$. Меру $m : A \to G$ условимся называть продолжимой на B, если и только если существует мера $n : B \to G$, являющаяся продолжением m.

Предположим, что $(G, \mathcal{T})$ является регулярным пространством и что сложение для G непрерывно (коротко: что $(G, +, \mathcal{T})$ является регулярной полугруппой). Верна

Теорема 2. *Мера m на A со значениями в регулярной группе продолжима на B, если и только если для m в каждой точке B существует предел по A.*

Теорема 2 является обобщением теоремы о продолжении непрерывной меры ([1], § 3, теорема 4). Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству этой теоремы. Теорема 2 применима, в частности, к мерам со значениями в локально компактных топологических абелевых полугруппах с непрерывным сложением ([4], гл. 1, § 9, предложение 9).

4. Равномерные полугруппы. Условимся говорить, что топологическая полугруппа $(G, +, \mathcal{T})$ и равномерная структура $\mathcal{W}$ для множества G, согласующаяся с топологией $\mathcal{T}$, образуют равномерную полугруппу $(G, +, \mathcal{T}, \mathcal{W})$ ([4], гл. 2 § 1, определение 3 и § 4, определение 1). Отображение $m : A \to G$ всюду плотного подпространства $(A, A \cap \mathcal{S})$ топологического пространства $(B, \mathcal{S})$ и равномерное пространство $(G, \mathcal{T}, \mathcal{W})$ будем называть локально равномерно непрерывным в точке b пространства B, если и только если для каждого окружения W существует окрестность U точки b такая, что $m(A \cap U) \times m(A \cap U) \subseteq W$ (т. е. произвольно близки образы $m(x)$ и $m(y)$ каждых точек x и y, достаточно близких точке b). Равномерную абелеву полугруппу $(G, +, \mathcal{T}, \mathcal{W})$, для которой $(G, \mathcal{T}, \mathcal{W})$ является полным отделимым пространством и сложение непрерывно, будем коротко называть полной регулярной полугруппой. При тех же предположениях относительно A и B, которые были сделаны для теоремы 2, верна

Теорема 3. *Мера m на A со значениями в полной регулярной полугруппе продолжима на B, если и только если m локально равномерно непрерывна в каждой точке B.*

Теорема 3 является следствием теоремы 2. Действительно, если $(G, +, \mathcal{T}, \mathcal{W})$ — полная регулярная полугруппа, то $(G, +, \mathcal{T})$ — регулярная полугруппа ([4], гл 2, § 1, предложение 3). А по критерию Коши условие теоремы 3 эквивалентно условию теоремы 2 ([4], гл. 2, § 3, предложение 6).

Теорема 3 применима, в частности, к мерам со значениями в компактных и полных локально компактных топологических абелевых полугруппах с непрерывным сложением ([4], гл. 2, § 3, предложение 7 и § 4, теорема 1 и следствие 2).

5. Секвенциальные меры. Рассмотрим булеву алгебру $(C, +, \cdot)$, для которой множеством элементов является класс C всех частей множества E, сложением является симметрическая разность и умножением — пересечение. Упорядочим множество C отношением включения. Секвенциальной топологией условимся называть наибольшую из топологий для C, при которых каждая порядково сходящаяся последовательность сходится к своему порядковому пределу. Множество C и секвенциальная топология $\mathcal{S}$ образуют отделимое пространство $(C, \mathcal{S})$ ([1], § 2, теорема 2). Булева алгебра $(C, +, \cdot)$ с топологией $\mathcal{S}$ образуют топологическую булеву алгебру $(C, +, \cdot, \mathcal{S})$ ([1], § 2, теорема 3).

Рассмотрим топологическое булево кольцо $(A, +_{A\times A}, \cdot_{A\times A}, A \cap \mathcal{S})$, определяемое множеством $A \subseteq C$. Меры, определенные на A, будем называть секвенциальными мерами на A. Например, вещественными секвенциальными мерами на A являются ограниченные счетно аддитивные вещественные функции на A и только они ((1), § 3, теорема 6′). Каждая последовательность делителей нуля из A, объединение которой принадлежит A, суммируема и сумма этой последовательности равна ее объединению ((3), § 1, предложение 1). По теореме 1 отсюда следует, что секвенциальные меры со значениями в отделимых топологических абелевых полугруппах счетно аддитивны.

Множество $\tilde{A}$ пределов всех сходящихся в пространстве $(C, \mathscr{S})$ последовательностей элементов множества A назовем секвенциальным замыканием множества A. Меры на A, продолжимые на $\tilde{A}$, условимся называть секвенциально продолжимыми. Верна

Лемма 1. *Каждая секвенциальная мера со значениями в секвенциально полной регулярной полугруппе с равномерно непрерывным сложением секвенциально продолжима.*

Кольцо $(\bar{A}, +_{\bar{A}\times\bar{A}} \boxdot_{\bar{A}\times\bar{A}})$, определяемое замыканием $\bar{A}$ множества A, является σ-кольцом, порожденным A ((1), § 2, предложение 8). Меры на A, продолжимые на $\bar{A}$, условимся коротко называть продолжимыми. Верна

Лемма 2. *Если каждая секвенциальная мера со значениями в регулярной полугруппе секвенциально продолжима, то каждая такая мера продолжима.*

Доказательство леммы 1 основывается на критерии Коши, а доказательство леммы 2 — на принципе Цорна и теореме 2.

Из лемм 1 и 2 следует

Теорема 4. *Каждая секвенциальная мера со значениями в секвенциально полной регулярной полугруппе с равномерно непрерывным сложением продолжима.*

Теорема 4 применима, в частности, к мерам со значениями в секвенциально полных топологических абелевых группах с непрерывным сложением ((2), гл. 3, § 3, теорема 2). Она является обобщением доказанной Е. А. Печерским (5) теоремы о продолжимости секвенциальных мер со значениями в полной регулярной группе.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
13 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Савельев, Сибирск. матем. журн., 6, 6 (1965). [2] Н. Бурбаки, Общая топология (топологические группы), 1969. [3] Л. Савельев, Сибирск. матем. журн., 9, 4 (1968). [4] Н. Бурбаки, Общая топология (основные структуры), 1968. [5] Е. Печерский, Сибирск. матем. журн., 10, 3 (1969).