

УДК 519.95-62-50

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Г. М. УЛАНОВ, И. Я. КРИЧЕВСКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ НАКОПЛЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЙ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 14 VI 1971)

Теория накопления в линейных системах автоматического управления под влиянием внешнего возмущения $f(t)$, ограниченного по модулю $|f(t)| \leq m$, развита в трудах Б. В. Булгакова ^(1, 2), а также в последующих работах Н. Г. Чеботарева ⁽³⁾, А. И. Лурье ⁽⁴⁾ и др. ⁽⁵⁻¹¹⁾. Современная теория накоплений отклонений имеет своей целью определение условий накопления отклонений и оценку максимальной динамической ошибки системы на конечном отрезке времени $[0, T]$ при возмущающих воздействиях $f(t)$, ограниченных по модулю вместе с первыми ее двумя производными, и связь указанной задачи с теорией оптимальных процессов.

Содержание настоящей заметки посвящено указанной проблеме.

В математическом отношении эта задача может быть сведена к отысканию величины

$$\max_{0 \leq T' \leq T} \max_{f \in M} I(f, T') = \max_{0 \leq T' \leq T} \max_{f \in M} \int_0^{T'} K(T-t, T) f(t) dt \quad (1)$$

в классе M управлений $f(t)$, удовлетворяющих условиям

$$|f^i(t)| \leq m_i, \quad |f'(t) - f'(s)| \leq m_2 |t - s| \quad (i = 0, 1). \quad (2)$$

Здесь $K(T-t, T)$ — импульсная переходная функция по возмущению, имеющая конечное число точек переключения $(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$, расположение которых не зависит от T' . В дальнейшем будем полагать $K(T-t, T) \geq 0$ в четных интервалах $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, 1, n-1$).

Задача о максимальном значении линейного функционала $I(f)$ ($f \in M$) в фиксированный момент времени T рассматривалась в ^(7, 8), где была получена основная теорема о форме оптимального управления и рассмотрены некоторые соображения, относящиеся к ее эффективному решению. Определим множество $L[t_r, t_{r+p}] = \{f; f \in M; f(t_j) = a_j; f'(t_j) = b_j\}$ ($j = r, \dots, r+p$).

Функции $f_v(t) = \sup f(t)$ и $f_n(t) = \inf f(t)$ ($f \in R$) будем называть соответственно верхней и нижней функциями R .

Имеет место следующая

Теорема 1. Наибольшее значение функционала $I(f)$ в классе управлений $f \in M$ достигается на кусочно-квадратичной функции $f_m(t)$, обладающей следующими свойствами:

- а) функция $f_m(t)$ однозначно определяется по ее значениям и значениям производной в точках переключения ядра функционала $K(T-t, T)$;
- б) в каждом интервале $[t_j, t_{j+1}]$, где $K(T-t, T) \geq 0$ ($K(T-t, T) \leq 0$) функция $f_m(t)$ совпадает с верхней (с нижней) функцией некоторого множества $L[0, T]$.

Кроме того, будет справедлива

Теорема 2. Соотношение (1) достигается на конечном множестве значений t , состоящем из точки T , точек переключения ядра функционала и точек θ_s переключения максимизирующей функции $f_m(t)$, принадлежащих интервалам $[t_s, t_{s+1}]$ ($t_s < \theta_s < t_{s+1}$) знакопостоянства ядра

$K(T-t, T)$, в которых выполнены условия

$$(-1)^s f_m(t_s) > 0, \quad (-1)^s f'_m(t_s) < 0. \quad (a)$$

Действительно, функционал $I(j, T')$ задан на компактном топологическом произведении множества M и отрезка $[0, T]$ и, следовательно, достигает своего наибольшего значения в некоторой точке T_r интервала $[t_r, t_{r+1}]$ знакопостоянства ядра.

Максимизирующая функция $f_m(t)$ в $[t_r, t_{r+1}]$ будет верхней (при $r=0, 2, \dots$) или нижней ($r=1, 3, \dots$) функцией множества $L(t_r) = \{f: f(t_r) = a_r, f'(t_r) = b_r, f \in M\}$. В общем случае точка T_r будет совпадать с точкой t_r или t_{r+1} , так как при $T_r > t_r$ по крайней мере в интервале $[T_r - \varepsilon, t_{r+1}]$ ($0 < \varepsilon < T_r - t_r$) будет $f_m(t) > 0$, $f'_m(t) < 0$, что влечет за собой неравенство $I(f_m, t_{r+1}) > I(f_m, t'_r)$ ($t_r < t'_r < t_{r+1}$).

В частном случае, когда выполнены условия (а), функционал $I(f_m, T')$ может принимать максимальное значение в точке θ_r , поскольку в этом случае будет $K(T-t, T)f_m(t) \geq 0$ ($t_r \leq t \leq \theta_r$).

Теоремы 1–2 дают возможность заменить бесконечно-мерную задачу (1), (2) конечно-мерной задачей максимизации конечного числа некоторых вспомогательных функций $2k$ переменных $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ ($k=1, \dots, n$), а ее эффективное решение привести к решению функциональных уравнений Р. Беллмана:

$$I_{k+1} = \max_{a_k, b_k} \left[I_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} K(T-t, T) f_0(t; a_k, b_k, a_{k+1}) dt \right], \quad (3)$$

$$I_k = \max_{f_0 \in L_k} \int_0^{t_k} K(T-t, T) f_0(t; a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_k) dt,$$

$$L_k = \{f: f \in M; f(t_k) = a_k, f'(t_k) = b_k\}.$$

Функция $f_0(t)$ в каждом интервале $[t_j, t_{j+1}]$ совпадает с верхней ($k=0, 2, \dots$) — соответственно с нижней ($k=1, 3, \dots$) — функциями множеств $L[t_j, t_{j+1}]$ ($j=0, 1, \dots, k-1$) и $L[t_k, t_{k+1}]$.

Величина $\max \max I(f, T')$ находится в результате последовательного определения I_{k+1} ($k=0, 1, \dots, n-1$) и $I_0 = I_{k+1} + \varphi(\theta_k)$, где $\varphi(\theta_k)$ — известный функционал и их сопоставления между собой.

Функциональные уравнения (3) являются двумерными, что создает известные вычислительные трудности их решения на ЭЦВМ. Используя некоторые свойства оптимальных управлений в точках переключения ядра функционала, можно понизить размерность задачи.

Пусть C_k — множество всех значений $f'_0(t_k)$, для которых L_k не пусто; B_k — множество всех значений $f'_0(t_k)$, для которых $L[t_k, t_{k+1}]$ не пусто.

Определим подмножества L_k^* функций $f_0(t) \in L_k$, у которых производная $f'_0(t)$ в интервале $[t_{k-1}, t_k]$ совпадает с верхней при $k=1, 3, \dots$ (соответственно с нижней при $k=2, 4, \dots$) функцией множества производных $f'(t)$ в некотором классе

$$U = \{f'(t): |f'(t)| \leq m_1, |f'(t) - f'(s)| \leq m_2|t-s|, f'(t_j) = b_j\} \\ (j = k-1, k).$$

Пусть V — множество управлений $f_0(t) \in M$, у которых производная

$$f'_0(t_k) = \begin{cases} \inf B \cap C & (k=1, 3, \dots), \\ \sup B \cap C & (k=2, 4, \dots). \end{cases}$$

Пусть, наконец, значения a_{k+1} и b_{k+1} удовлетворяют условию непустоты множества $L[t_k, t_{k+1}]$.

Тогда справедлива следующая

Теорема 3. *Решение функциональных уравнений (3) реализуется на множестве $L_h^* \cup V$ управлений $f_0(t)$.*

Таким образом, решение задачи (1), (2) сводится к решению простейших одномерных функциональных уравнений для функций $f_0 \in L_h^*$ и выродившихся двумерных функциональных уравнений для функций $f_0 \in V$, для которых в каждой комбинации значений $f_0(t_k)$, $f_0(t_{k+1})$ и $f_0'(t_{k+1})$ рассматривается единственное значение $f_0'(t_k)$, определяемое теоремой 3. Таким образом, существенно упрощается эффективное решение задачи.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
13 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. В. Булгаков, ДАН, **51**, № 5 (1946). ² Б. В. Булгаков, Колебания, 1949. ³ Н. Г. Чеботарев, Письмо в редакцию, Автоматика и телемеханика, **9**, № 4 (1948). ⁴ А. И. Лурье, Операционное исчисление и его приложение к задачам механики, 1957. ⁵ Г. М. Уланов, Автоматика и телемеханика, **9**, № 3 (1948). ⁶ Г. М. Уланов, Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления, 1971. ⁷ И. Я. Кричевский, Доп. АН УРСР, № 8 (1966). ⁸ И. Я. Кричевский, Республиканск. научн. сборн. Теория функций, функциональный анализ и их применения, в. 4, Харьков, 1967. ⁹ Л. С. Гноенский, ПММ, **25**, в. 2 (1961). ¹⁰ В. А. Троицкий, Инж. журн. Механика тверд. тела, № 5 (1966). ¹¹ Е. Н. Розенвассер, Колебания нелинейных систем, «Наука», 1969.