Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 4

УДК 513.838+513.836

МАТЕМАТИКА

А. Т. ФОМЕНКО

МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ПЛАТО В ЭКСТРАОРДИНАРНЫХ ТЕОРИЯХ ГОМОЛОГИЙ И КОГОМОЛОГИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 29 III 1971)

I. В ([1-6]) задача Плато была решена в классах компактов, реализующих или заклеивающих циклы в группах гомологий Александрова — Чеха. В настоящей заметке ставится и решается задача Плато в рамках произвольных экстраординарных теорий.

II. Обозначим через $\mathscr{P}^2$ категорию пар конечных CW-комплексов; пусть h_* (h^*) — произвольная теория гомологий (когомологий) на $\mathscr{P}^2$, удовлетворяющая первым шести аксиомам Стинрода — Эйленберга. Пусть $(X, A) \in U_c$ (U_c — категория компактных пар), α — конечное покрытие (X, A); (N_α, N_α') — соответствующий нерв α; тогда положим $\check{h}_q(X, A) = \underleftarrow{\lim}\, h_q(N_\alpha, N_\alpha')$; $\check{h}^q(X, A) = \underrightarrow{\lim}\, h^q(N_\alpha, N_\alpha')$; $(N_\alpha, N_\alpha') \in \mathscr{P}^2$. Полученные группы будем называть группами спектральных экстраординарных гомологий и когомологий. Функторы $\check{h}_*$ и $\check{h}^*$ удовлетворяют аксиомам А1 — А3, А5, А6.

Предложение 1. *Для любой пары $(X, A) \in U_c$ спектральная когомологическая последовательность пары точна (аксиома А4), если все $h^q(x) \in \mathfrak{G}_R$ (x есть точка, $\mathfrak{G}_R$ — категория R-модулей над фиксированным кольцом R).*

Спектральная гомологическая последовательность пары точна в следующих случаях: 1) все $h_q(x) \in \mathfrak{A}_c$ (категория компактных абелевых групп); 2) все $h_q(x) \in \mathfrak{G}_F{}^f$ (конечномерные векторные пространства над фиксированным полем F).

Теории $\check{h}_*$ и $\check{h}^*$ непрерывны на U_c в следующих случаях: а) *все $h_q(x) \in \mathfrak{A}_c$;* б) *все $h_q(x) \in \mathfrak{G}_R$;* в) *все $h^q(x) \in \mathfrak{G}_R$; R фиксировано.*

Доказательство предложения 1 не использует цепных комплексов (что делается в классическом случае), так как экстраординарные теории не обладают соответствующими комплексами цепей. Если $(X, A) \in \mathscr{P}^2 \subset U_c$, то $\check{h}_*(X, A) = h_*(X, A)$; $(\check{h}^*(X, A) = h^*(X, A))$. В дальнейшем знак $\vee$ над h будем опускать: через $\tilde{h}_*{}^x$ ($\tilde{h}_*{}^x$) будем обозначать приведенные теории.

III. Пусть $\mathfrak{M}$ — компактное риманово многообразие без края, $A \subset \mathfrak{M}$ — произвольный, но фиксированный компакт. Пусть $\tilde{h}_*^x$ — точная непрерывная теория гомологий на U_c; $x \in A$; пусть X — компакт такой, что $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} \mathfrak{M}$ — вложения. Пусть $\mathscr{L}_* = \{\ldots, \mathscr{L}_p, \ldots\}$ — произвольный набор фиксированных подгрупп $\mathscr{L}_p \subset \tilde{h}_p{}^x(A)$; $'\mathscr{L}_* = \{\ldots, '\mathscr{L}_q, \ldots\}$ — набор подгрупп $'\mathscr{L}_q \subset \tilde{h}_q{}^x(\mathfrak{M})$. Через $O_* = \tilde{h}_*{}^x(A, \mathscr{L}_*, '\mathscr{L}_*)$ обозначим класс всех компактов X таких, что: 1) $\mathscr{L}_* \subset \operatorname{Ker} i_*$; 2) $'\mathscr{L}_* \subset \operatorname{Im} j_*$. Это означает, что X «заклеивает гомологические дырки $\mathscr{L}_*$» и реализует циклы $'\mathscr{L}_*$. Если h_* есть обычная теория Александрова — Чеха, то получаем определение, сформулированное в ([4]).

Пусть $\tilde{h}_x{}^*$ — точная непрерывная теория когомологий на U_c. Пусть $\mathscr{L}^* = \{\ldots, \mathscr{L}_p, \ldots\}$ — произвольный набор фиксированных подмножеств $\mathscr{L}_p \subset \tilde{h}_x{}^p(A) \setminus \{0\}$ (групповая структура игнорируется); $'\mathscr{L}^* = \{\ldots, '\mathscr{L}_q, \ldots\}$ — также набор подмножеств $'\mathscr{L}_q \subset \tilde{h}_x{}^q(\mathfrak{M}) \setminus \{0\}$. Через $O^* = \tilde{h}_x{}^*(A, \mathscr{L}^*, '\mathscr{L}^*)$ обозначим класс всех компактов X таких, что: 1) $\mathscr{L}^* \subset \tilde{h}_x{}^*(A) \setminus \operatorname{Im} i^*$; 2) $'\mathscr{L}^* \subset \tilde{h}_x{}^*(\mathfrak{M}) \setminus \operatorname{Ker} j^*$. Можно рассмотреть вложение $(X, A) \to (\mathfrak{M}, A)$ и дать аналогичные определения. Соответствующие классы обозначим $O_*{}^1$ и $O_1{}^*$.

IV. В случае, когда h_* (h^*) является обычной теорией гомологий (когомологий) вариационная задача в классе O_* (O^*) сводится фактически к минимизации некоторой одной хаусдорфовой меры Λ^k (см. ([1–6])). Если же теория h_* (h^*) — экстраординарная, то необходимо ввести в рассмотрение набор мер $\Lambda^k, \Lambda^{k-1}, \ldots, \Lambda^1$, поскольку элементы обобщенных теорий «размазаны», вообще говоря, по всем размерностям от 1 до k.

Приведем пример вариационной задачи в нашем смысле: *пусть* ξ — *стабильно нетривиальное векторное расслоение на* $\mathfrak{M}$; *рассматриваются все такие компакты* $X \subset \mathfrak{M}$, *что ограничение* $\xi|_X$ *по-прежнему стабильно нетривиально. Требуется найти среди всех таких компактов* X *такой компакт* X_0, *«все хаусдорфовы меры» которого были бы «наименьшими».*

В качестве других примеров можно взять теорию кобордизмов, когомотопические группы, теорию бордизмов и т. д.

В дальнейшем вместо O_* и O^* будем писать O.

Определение 1. Класс O будем называть p-устойчивым, если из того, что $X \in O$ следует, что и любой компакт $Y \subset X$ такой, что $\overline{X \setminus Y}$ есть конечный симплициальный комплекс размерности $\leqslant p$, также принадлежит классу O.

Пример. Пусть $h_* = \mathfrak{N}_*$ — теория неориентированных бордизмов, $\pi_1(\mathfrak{M}) = \pi_2(\mathfrak{M}) = 0$. Тогда класс $O = \widetilde{\mathfrak{N}}_{\cdot x}(x, 0, '\mathscr{L}\cdot)$ 2-устойчив.

V. В этом пункте мы введем понятие Λ-процесса. Пусть $O \neq \phi$, $d_k = \inf\limits_{x \in O} \Lambda^k(X \setminus A)$; пусть k — наименьшее из всех таких целых чисел, что $d_k < \infty$. Предположим, что O 2-устойчив. Пусть $(X_n) = (X_n{}^1)$ — произвольная k-минимизирующая последовательность, т. е. $\Lambda^k(X_n{}^1 \setminus A) \to \to d_k$. Построим по этой последовательности функцию $\psi_k(P)$ (индекс k — это размерность меры Λ^k; описание $\psi_k(P)$ см. в ([2, 4])). Эта функция определена неоднозначно. Положим $S^k = \{P \in \mathfrak{M} \setminus A \mid \psi_k(P) > 0\}$.

Предложение Λ.1. *Множество* $A \cup S^k$ *есть компакт в* $\mathfrak{M}$.

Существует последовательность $X_n{}^{1'} \in O$ *такая, что*: 1) $\Lambda^k(X_n{}^{1'} \setminus A) \to \to d_k$; 2) *для любой открытой окрестности* U *компакта* $A \cup S^k$ *существует номер* $N = N(U)$ *такой, что* $\Lambda^{k-1}(X_n{}^{1'} \setminus U) < \infty$ *при* $n > N(U)$.

Это означает, что k-мерные части компактов $X_n^{1'}$ накапливаются в сколь угодно малой окрестности компакта $A \cup S^k$. Рассмотрим окрестности U_α^1 компакта $A \cup S^k$ такие, что $U_\alpha^1 \supset U_{\alpha+1}^1$ и $\bigcap\limits_\alpha U_\alpha^1 = A \cup S^k$, положим $\omega_\alpha^{k-1} = \inf\limits_{X \in O} \Lambda^{k-1}(X \setminus U_\alpha^1)$; в силу Λ.1. $\omega_\alpha^{k-1} < \infty$. Так как $\omega_{\alpha+1}^{k-1} \geqslant \omega_\alpha^{k-1}$, то существует $\lim\limits_{(\alpha)} \omega_\alpha^{k-1} = \lambda_{k-1}(\Lambda, (X_n^1)) \leqslant \infty$, $(\lambda_k(\Lambda, X_n^1)) = d_k$. Здесь буквой Λ указана неоднозначность этого построения. Число $\lambda_{k-1}(\Lambda, (X_n))$ не зависит от выбора окрестностей $U_\alpha{}^1$. Рассмотрим последовательность $X_n{}^2 \in O$ такую, что $\Lambda^{k-1}(X_n{}^2 \setminus U_n{}^1) = \omega_n^{k-1} + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \geqslant 0$, $\varepsilon_n \to 0$. Как и выше, построим по этой последовательности функцию $\psi_{k-1}(P)$; положим $S^{k-1} = \{P \in \mathfrak{M} \setminus A \setminus S^k \mid \psi_{k-1}(P) > 0\}$.

Предложение Λ.2. *Множество* $A \cup S^k \cup S^{k-1}$ *есть компакт в* $\mathfrak{M}$.

Существует последовательность $X_n{}^{2'} \in O$ *такая, что*: 1) $\Lambda^{k-1}(X_n{}^{2'} \setminus U_n{}^1) = \omega_n^{k-1} + \varepsilon_n{}'$, $\varepsilon_n{}' \geqslant 0$, $\varepsilon_n{}' \to 0$; 2) *для любой открытой окрестности* U *компакта* $A \cup S^k \cup S^{k-1}$ *существует номер* $N = N(U)$ *такой, что* $\Lambda^{k-2}(X^{2'} \setminus U) < \infty$, $n > N(U)$.

Рассмотрим окрестности U_α^2 компакта $A \cup S^k \cup S^{k-1}$, $U_\alpha^2 \supset U_{\alpha+1}^2$, $\bigcap\limits_\alpha U_\alpha^2 = A \cup S^k \cup S^{k-1}$; пусть $\omega_\alpha^{k-2} = \inf\limits_{X \in O} \Lambda^{k-2}(X \setminus U_\alpha^2)$; тогда $\omega_\alpha^{k-2} < \infty$. Положим

$\lambda_{k-2}(\Lambda, (X_n)) = \lim\limits_{(\alpha)} \omega_\alpha^{k-2} \leqslant \infty$. Это число не зависит от выбора U_α^2. Строим по последовательности X_n^3 функцию $\psi_{k-2}(P)$ и т. д. Получаем последовательность $S^k, S^{k-1}, \ldots, S^3$ $(S^i = \{P \in \mathfrak{M} \setminus A \setminus \bigcup\limits_{i+1 \leqslant j \leqslant k} S^j \mid \psi_j(P) > 0\})$, причем множества S^2 и S^1 пусты ввиду 2-устойчивости класса O.

На последнем шаге мы имеем: компакт $A \cup \bigcup\limits_{p=4}^{k} S^p$; окрестности U_α^{k-3}; $\bigcap\limits_\alpha U_\alpha^{k-3} = A \cup \bigcup\limits_{p=4}^{k} S^p = \widetilde{X}_4$; $(A \cup \bigcup\limits_{p=i}^{k} S^p = \widetilde{X}_i)$; $\omega_\alpha^3 = \inf\limits_{X \in O} \Lambda^3(X \setminus U_\alpha^{k-3}) < \infty$; $\lambda_3(\Lambda, (X_n)) = \lim\limits_{(\alpha)} \omega_\alpha^3$; последовательность $X_n^{k-3} \in O$ такую, что $\Lambda^3(X_n^{k-3} \setminus U_n^{k-3}) = \omega_n^3 + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$; функцию $\psi_3(P)$, построенную по (X_n^{k-3}), и множество S^3.

Предложение Λ. $(k-3)$. *Множество* $A \cup \bigcup\limits_{p=3}^{k} S^p = \widetilde{X}_3$ *есть компакт в* $\mathfrak{M}$, *причем* $\widetilde{X}_3 \in O$. *Для любой открытой окрестности* U *компакта* $\widetilde{X}_3$ *существует номер* $N = N(U)$ *такой, что* $X_n^{k-3} \subset U$ *при* $n > N(U)$.

На этом последнем шаге необходимость в перестройке X_n^{k-3} до $X_n^{(k-3)'}$ отпадает ввиду 2-устойчивости класса O.

Определение 2. Описанный выше процесс мы будем называть Λ-процессом; полученный компакт $\widetilde{X}_3$ обозначим $\Lambda((X_n))$; вектор $(\lambda_k, \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_3) = \lambda(\Lambda, (X_n))$ будем называть λ-вектором.

VI. Определение 3. Λ-процесс будем называть конечным, если все $\lambda_i < \infty$ $(3 \leqslant i \leqslant k)$, т. е. $\lambda(\Lambda, (X_n)) < \infty$.

Теорема А. *Пусть класс* O *2-устойчив и* $d_k < \infty$.

Тогда для любого конечного Λ-процесса компакт $\Lambda((X_n)) \in O$ *является минимальным, т. е.* $\Lambda^i(S^i) = \lambda_i(\Lambda, (X_n))$, $3 \leqslant i \leqslant k$; *в частности,* $\Lambda^k(\Lambda((X_n)) \setminus A) = \Lambda^k(S^k) = d_k$. *Кроме того, в каждом* S^i *существует подмножество* Z_i *такое, что* $\Lambda^i(Z_i) = 0$ *и каждая точка* $P \in S^i \setminus Z_i$ *обладает в* S^i *окрестностью, гомеоморфной диску* D^i. *Если* $P \in S^i \setminus Z_i \setminus \bigcup\limits_{p=3}^{i-1} \overline{S}^p$, *то диск* D^i *можно считать дифференцируемым.*

Теорема А решает задачу о нахождении минимума «в направлении Λ-процесса»; число $d_k = \lambda_k$ есть абсолютный минимум и зависит только от O, а числа λ_i, $3 \leqslant i \leqslant k-1$, зависят еще и от того, как были фиксированы предыдущие компакты $\widetilde{X}_{i+1}$.

Следствие 1. *Пусть* $\Lambda((X_n)) = A \cup \bigcup\limits_{p=3}^{k} S^p$. *Рассмотрим классы* $F(\widetilde{X}_i) = \{X \in O \mid X \supset \widetilde{X}_i\}$; *пусть* $\widetilde{\lambda}_i = \inf \Lambda^i(X \setminus \widetilde{X}_{i+1})$, *где* $X \in F(\widetilde{X}_{i+1})$.

Тогда $\widetilde{\lambda}_i = \lambda_i(\Lambda, (X_n))$, *т. е. компакт* $\Lambda((X_n))$ *является минимальным в* $F(\widetilde{X}_{i+1})$.

Следствие 2. *Предположим, что класс* O $(k-1)$*-устойчив. Тогда Λ-процесс заканчивается на первом шаге, т. е.* $\Lambda((X_n)) = A \cup S^k = \widetilde{X}_k$.

VII. По данной k-минимизирующей последовательности (X_n) можно построить много Λ-процессов, причем их λ-векторы могут отличаться, начиная с λ_{k-1}. Введем в множестве всех λ-векторов (полученных при всевозможных Λ-процессах) лексикографическое упорядочение. Можно ли найти такой $X \in O$, $X = \Lambda((X_n))$, чтобы его λ-вектор был наименьшим в этом упорядочении? Из теоремы А следует, что непуст класс $O_k = \{X \in O \mid \Lambda^k(X \setminus A) = d_k\}$. Пусть $X \in O_k$; положим $X_n \equiv X$ и построим по этой последовательности функцию $\psi_k(P)$; тогда в X однозначно определено подмножество $\psi_k X = \{P \in X \setminus A \mid \psi_k(P) > 0\}$. Из теоремы А следует, что $A \cup \psi_k X$ — компакт в $\mathfrak{M}$ и $\Lambda^k(X \setminus A) = \Lambda^k(\psi_k X) = d_k$.

Теорема В. *Предположим, что* $O \neq \phi$, *2-устойчив,* $d_k < \infty$ *и что все Λ-процессы в классе* O_k *конечны.*

Тогда существует компакт $M \in O$ такой, что для некоторого Λ_0-процесса имеем: $M = \Lambda_0((X_n^0)) = A \cup S_0^k \cup \ldots \cup S_0^3$; $\Lambda^i(S_0^i) = \lambda_i(\Lambda_0, \quad (X_n^0))$, $3 \leqslant i \leqslant k$ (причем можно считать, что $X_n^0 \equiv M$); и для любого Λ-процесса в классе O выполняется неравенство $\lambda(\Lambda_0, M) \leqslant \lambda(\Lambda, (X_n))$ (в лексикографическом упорядочении). Тем самым, числа $\lambda_i(\Lambda_0, M)$ зависят только от класса O, т. е. компакт M является решением задачи на абсолютный минимум. Поскольку M является результатом Λ_0-процесса, то он имеет такие же локально-эвклидовы свойства, что и компакты $\Lambda((X_n))$ в теореме A.

VIII. Поскольку вектор $\lambda(\Lambda_0, M)$ зависит только от класса O, то абсолютные минимизирующие свойства компакта M можно сформулировать, не обращаясь к понятию λ-вектора. Положим $\lambda_i(\Lambda_0, M) = d_i$.

Теорема C. *Пусть $O \neq \phi$, 2-устойчив, $d_k < \infty$ и все Λ-процессы в классе O_k конечны. Рассмотрим минимальный компакт $M \in O$ и вектор d.*

1) *Тогда $O \neq \phi$ и $d_k = \inf\limits_{X \in O} \Lambda^k(X \setminus A)$; рассмотрим класс*

$$O_k = \{X \in O \mid \Lambda^k(X \setminus A) = d_k\}.$$

2) *Тогда $O_k \neq \phi$* и $d_{k-1} \inf\limits_{X \in O_k} \Lambda^k(X \setminus A \setminus \psi_k X)$; *рассмотрим класс*

$$O_{k,\,k-1} = \{X \in O_k \mid \Lambda^{k-1}(X \setminus A \setminus \psi_k X) = d_{k-1}\}.$$

3) *Тогда* $O_{k,\,k-1} = \phi$ и $\inf\limits_{X \in O_{k,k-1}} \Lambda^{k-2}(X \setminus A \setminus \psi_k X \setminus \psi_{k-1} X)$; *рассмотрим класс*

$$O_{k,\,k-1,\,k-2} = \{X \in O_{k,\,k-1} \mid \Lambda^{k-2}(X \setminus A \setminus \psi_k X \setminus \psi_{k-1} X) = d_{k-2}\}.$$

. . . .

$k-3$). *Тогда* $O_{k,\ldots,3} \neq \phi$ *и* $d_3 = \inf\limits_{X \in O_{k,\ldots,4}} \Lambda^3(X \setminus A \setminus \bigcup\limits_{p=4}^{k} \psi_p X)$.

Тем самым, класс $O_{k,\ldots,3}$ является множеством всех компактов M, реализующих абсолютный минимум всех хаусдорфовых мер Λ^i, $3 \leqslant i \leqslant k$.

Теорема D. *Теоремы, аналогичные теоремам* A, B, C, *имеют место и в случае классов O_*^1 и O_1^*.*

Оказывается, необходимо минимизировать меру Λ^i только в том случае, когда все большие меры $\Lambda^{i+1}, \ldots, \Lambda^k$ уже минимизированы. Элементарные примеры показывают, что минимизация всех мер без предварительной фиксации всех высших мер не имеет смысла, так как если разрешить последовательности X_n иметь меры $\Lambda^k(X_n \setminus A) = d_k + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$, то за счет этого ε_n можно обратить в нуль все меры Λ^i компактов X_n при $i < k$.

Рассмотрев теорию $h_* = \mathfrak{N}_*$ (неориентированные бордизмы) и взяв в качестве компакта A гладкое $(k-1)$-мерное подмногообразие в $\mathfrak{M}$, получаем решение задачи Плато в классе всех многообразий W с краем $dW = A$ (класс $\mathfrak{N}_*(A, \mathfrak{L}_*, 0)$). Если минимальный компакт M является CW-комплексом, то он является образом некоторого многообразия W_0 такого, что $\partial W^0 = A$.

Не решенной до сих пор задачей является нахождение абсолютного минимума в гомотопическом классе. Теоремы A, B, C означают, что если мы заменим отношение гомотопий отношением бордантности подмногообразий, то это уже гарантирует существование абсолютного минимума.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Federer, Geometric Measure Theory, 1969. [2] Ch. B. Morrey, Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Berlin, 1968. [3] F. Y. Almgren, Ann. Math., 87, № 2 (1968). [4] А. Т. Фоменко, ДАН, 187, № 4 (1969). [5] А. Т. Фоменко, ДАН, 192, № 1 (1970). [6] А. Т. Фоменко, ДАН, 192, № 2 (1970).