Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 517.94 *МАТЕМАТИКА*

П. А. ФРОЛОВ

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 30 VI 1969)

Дифференциальный оператор

$$I = \sum_{j=0}^{n} A_j \frac{\partial^n}{\partial x^{n-j}\partial y^j} + \sum_{k+l<n} B_{kl} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}, \tag{1}$$

где A_j, B_{kl} — постоянные вещественные $m \times m$-матрицы, называется эллиптическим, если соответствующий ему матричный пучок $L(\lambda)$ вида

$$L(\lambda) = \lambda^n A_0 + \lambda^{n-1} A_1 + \ldots + A_n \tag{2}$$

удовлетворяет одному из условий:

$$\det A_0 > 0, \quad \det L(\lambda) > 0, \quad -\infty < \lambda < +\infty, \tag{3}$$

или

$$\det A_0 < 0, \quad \det L(\lambda) < 0, \quad -\infty < \lambda < +\infty. \tag{3'}$$

Множества операторов, удовлетворяющих условиям (3) и (3′), обозначим $\mathscr{L}_+(n, m)$ и $\mathscr{L}_-(n, m)$ соответственно. Как мы показали в ([1]), каждое из множеств (3) и (3′) при $m > 2$ состоит из двух связных компонент. Компоненты $\mathscr{L}_+(n, m)$ обозначим $l_1^+(n, m)$ и $l_2^+(n, m)$. Как мы показали в ([1]), каждый оператор из $l_1^+(n, m)$ гомотопен оператору

$$I_{01} = \Delta^{n/2} E_m \qquad \text{при } n \text{ четном},$$

$$I_{11} = \Delta^q \begin{pmatrix} K & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K \end{pmatrix} \qquad \text{при } n \text{ нечетном}, \ n = 2q + 1,$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $K = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix}$.

Мы сейчас укажем необходимое и достаточное условие, при котором оператор (1) из $\mathscr{L}_+(n, m)$ принадлежит первой компоненте $l_1^+(n, m)$. Для этого свяжем с оператором (1) $n \cdot m \times n \cdot m$ матрицу $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & E \\ -A_0^{-1}A_n & \ldots & \ldots & \ldots & -A_0^{-1}A_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Спектр пучка (2) совпадает со спектром матрицы $\mathfrak{A}$.

Пусть $n \cdot m / 2$-векторы

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \qquad r = n \cdot m / 2, \tag{5}$$

образуют базис в инвариантном подпространстве матрицы $\mathfrak{A}$, соответствующем спектру из верхней полуплоскости. Рассмотрим определитель

$$\delta_L = (i)^r \det (f_1, f_2, \ldots, f_r, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_r), \tag{6}$$

где $i = \sqrt{-1}$. Нетрудно доказать, что δ_L вещественное.

Теорема 1. *Для того чтобы эллиптический оператор вида* (1) *из* $\mathscr{L}_+(n, m)$ *принадлежал компоненте* $l_1^+(n, m)$, *необходимо и достаточно, чтобы при n четном* $(n = 2q)$

$$\operatorname{sign} \delta_L = (-1)^{q(q-1)m/2} \tag{7}$$

и при n нечетном $(n = 2q + 1)$

$$\operatorname{sign} \delta_L = (-1)^{m(q^2-q-m)/2}. \tag{7'}$$

Наметим доказательство теоремы. Пусть $L_\varepsilon(\lambda)$ $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$ — деформация пучка $L_0(\lambda)$, отвечающего оператору из $\mathscr{L}_+(n, m)$. Базис (5), отвечающий $L_\varepsilon(\lambda)$, можно построить непрерывно зависящим от $\varepsilon \in [0, 1]$, следовательно, $\delta_{L_0} = \delta_{L_1}$. Нетрудно подсчитать, что δ_L, отвечающее I_{01} и I_{11}, вычисляются по формулам (7) и (7′), и, кроме того, $\delta_{L_{01}} = -\delta_{L_{02}}$, $\delta_{L_{11}} = -\delta_{L_{22}}$, где $Z_{02}^{(\lambda)}$, $L_{22}^{(\lambda)}$ — пучки, отвечающие каноническим представителям из $l_2^+(n, m)$ при n нечетном (см. ([1])).

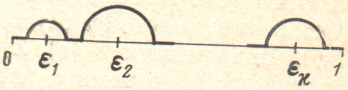

Рис. 1

2. Пусть G — область на плоскости (x, y), ограниченная бесконечно гладкой жордановой кривой Г. Обозначим через $\mathscr{H}_l(G)$, где l — целое $> n/2$, прямое произведение m пространств.

$$\mathscr{H}_{l-1/2}(\Gamma) \times \mathscr{H}_{l-1-1/2}(\Gamma) \times \ldots \times \mathscr{H}_{l-n/2-1/2}(\Gamma).$$

Для оператора (1) четного порядка $n = 2q$ рассмотрим задачу Дирихле:

$$I(u) = f, \quad f \in \mathscr{H}_{l-n}(G), \tag{8}$$

$$u|_\Gamma = g_0, \quad \partial u / \partial \nu|_\Gamma = g_1, \ldots, \partial^{q-1} u / \partial \nu^{q-1}|_\Gamma = g_{q-1}, \tag{9}$$

где $\partial / \partial \nu$ — производная по нормали к границе Г, а $g_j \in \mathscr{H}_{l-j-1/2}$.

Оператор из $\mathscr{H}_l(G)$ в $\mathscr{H}_{l-g-1/2}(\Gamma)$, определяемый равенствами (9), обозначим D.

Задачу (7)—(8) будем называть нормально разрешимой, если оператор $N = (I, D)$, действующий из $\mathscr{H}_l(G)$ в $\mathscr{H}_{l-n}(G) \times \mathscr{H}_{l-g-1/2}(\Gamma)$, является нётеровым, т. е. ядро и коядро оператора N имеют конечные размерности и область значений N замкнута в $\mathscr{H}_{l-n}(G) \times \mathscr{H}_{l-g-1/2}(\Gamma)$ (см. ([2])).

Не ограничивая общности, мы будем считать, что все собственные значения пучка (2) однократны. Тогда, как можно доказать, используя результат Лопатинского (см. ([3])), для того чтобы задача (8)—(9) была нормально разрешима, необходимо и достаточно, чтобы

$$d = \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \ldots & \psi_r \\ \lambda_1\psi_1 & \lambda_2\psi_2 & & \lambda_r\psi_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{q-1}\psi_1 & \lambda_2^{q-1}\psi_2 & & \lambda_r^{q-1}\psi_r \end{pmatrix} \neq 0, \tag{10}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — собственные значения пучка (2) в верхней полуплоскости, а $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ — соответствующие собственные векторы.

Теорема 2. *Множество эллиптических операторов* (1), *принадлежащих* $\mathscr{L}_+(n, m)$, *для которых задача Дирихле нормально разрешима, распадается на две связные компоненты:* $\tilde{l}_1^+(n, m)$ *и* $\tilde{l}_2^+(n, m)$, *при этом* $\tilde{l}_1^+(n, m)$ *и* $\tilde{l}_2^+(n, m)$ *являются открытыми всюду плотными связными подмножествами компонент* $l_1^+(n, m)$ *и* $l_2^+(n, m)$ *соответственно.*

Наметим доказательство этой теоремы. Пусть для определенности матричные пучки $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ отвечают операторам из компоненты $l_2^+(n, m)$ и пусть для обоих этих пучков выполнено условие (10).

С помощью представления $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ в виде произведения линейных пучков (см. ([1])) можно доказать, что существует аналитически зависящий от ε матричный пучок $L_\varepsilon(\lambda)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, принадлежащий $l_1^+(n, m)$ при всех ε:

$$L_\varepsilon(\lambda)\,|_{\varepsilon=0} = L_1(\lambda); \qquad L_\varepsilon(\lambda)\,|_{\varepsilon=1} = L_2(\lambda)$$

и такой, что собственные значения: $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon), \ldots, \lambda_r(\varepsilon)$, $\operatorname{Im}\lambda_j(\varepsilon) > 0$, и соответствующие собственные векторы $\psi_1(\varepsilon), \psi_2(\varepsilon), \ldots, \psi_r(\varepsilon)$ являются аналитическими функциями в окрестности отрезка $[0, 1]$ комплексной ε-плоскости. Функция $d(\varepsilon)$ (см. (10)) аналитична, не равна тождественно нулю и, следовательно, имеет на отрезке $[0, 1]$ не более конечного числа нулей. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\varkappa$ — нули $d(\varepsilon)$ на отрезке $[0, 1]$; мы можем обойти их в комплексной ε-плоскости, изменяя ε по контуру γ, соединяющему точки 0 и 1 (см. рис. 1), где полуокружности с центрами в нулях $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\varkappa$ достаточно малого радиуса. Построим пучок, зависящий от ε, с собственными значениями $\lambda_1(\varepsilon), \bar\lambda_1(\varepsilon), \ldots, \lambda_r(\varepsilon), \bar\lambda_r(\varepsilon)$ и соответствующими собственными векторами $\psi_1(\varepsilon), \bar\psi_1(\varepsilon), \ldots, \psi_r(\varepsilon), \bar\psi_r(\varepsilon)$, где ε изменяется от 0 до 1 вдоль контура γ. Этот пучок, как нетрудно показать, является вещественным при всех $\varepsilon \in [0, 1]$ и решает указанную задачу.

Отметим, что каждая из компонент связности $l_1^+(n, m)$ и $l_2^+(n, m)$ содержит и операторы, для которых задача Дирихле не является нормально разрешимой. Например, оператор

$$\begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix},$$

где B_0 — оператор Бицадзе (см. ([4]))

$$B_0 = \begin{pmatrix} \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 & 2\partial^2/\partial x\,\partial y \\ -\,2\partial^2/\partial x\,\partial y & \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 \end{pmatrix},$$

принадлежит $l_1^+(n, m)$ и, следовательно, гомотопен оператору ΔE_4. Это утверждение содержит ответ на вопрос, поставленный И. М. Гельфандом (см. ([5])).

Тем же методом можно доказать, что если условия Дирихле на границе Г заменить произвольными условиями с коэффициентами, не зависящими от точки границы, то множество операторов (1) из $\mathscr{L}_+(n, m)$, для которых эта краевая задача нормально разрешима, распадается на две связные компоненты.

Автор выражает благодарность проф. В. Б. Лидскому за ценные советы и внимание к настоящей работе.

Московский физико-технический институт

Поступило 8 IV 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. А. Фролов, ДАН, 181, № 6 (1968). [2] М. С. Агранович, УМН, 20, в. 5 (1965). [3] Я. Б. Лопатинский, Львов, Научн. зап. Политехн. инст., 38, сер. физ.-матем., 2, 3 (1956). [4] А. В. Бицадзе, Краевые задачи эллиптических уравнений второго порядка, М., 1956, стр 87. [5] И. М. Гельфанд, УМН, 14, в. 3, 6 (1959).