Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

МАТЕМАТИКА

ЭДВИН ХЬЮИТ, ДУЗА МАКДУФ

НЕКОТОРЫЕ ПАТОЛОГИЧЕСКИЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ В АЛГЕБРЕ МЕР НА КОМПАКТНОЙ ГРУППЕ

(Представлено академиком П. С. Александровым 26 I 1970)

§ 1. В заметке рассматривается алгебра $\mathbf{M}(G)$ всех регулярных комплексных борелевских мер на компактной группе G. Относительно операций сложения, скалярного умножения, умножения (конволюции), заданного формулой

$$\mu * \nu(E) = \int_G \mu(Et^{-1})\, d\nu(t),$$

и нормы $\|\mu\| = |\mu|(E)$ $\mathbf{M}(G)$ является банаховой алгеброй. Она имеет единицей меру ε_e с массой 1, сосредоточенной в единице e группы G, и является коммутативной если и только если коммутативна группа G. Отображение $\mu \mapsto \mu^{\sim}$, где $\mu^{\sim}(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$,— инволюция в $\mathbf{M}(G)$ (элементарная теория алгебры $\mathbf{M}(G)$ развита в ([1])). Алгебра $\mathbf{M}(G)$ содержит алгебру мер, абсолютно непрерывных относительно меры Хаара λ как замкнутый двусторонний идеал. Эта алгебра может быть идентифицирована с алгеброй $\mathfrak{L}_1(G)$ всех интегрируемых относительно λ функций на G. Для алгебры $\mathfrak{L}_1(G)$ хорошо известно (см., например, ([1]), § 38), что все ее замкнутые идеалы, и одно-, и двусторонние, могут быть описаны через представления группы G. В частности, каждый максимальный двусторонний собственный идеал в $\mathfrak{L}_1(G)$ имеет вид

$$\left\{ f \in \mathfrak{L}_1(G) : \int_G U_x f(x)\, d\lambda(x) = 0 \right\} = \mathfrak{J}_U,$$

где $x \mapsto U_x$ есть некоторое непрерывное неприводимое унитарное представление группы G. Фактор-алгебра $\mathfrak{L}_1(G) / \mathfrak{J}_U$ изоморфна алгебре всех линейных операторов на пространстве представлений U, а потому конечномерна.

Несколько лет оставался открытым вопрос о том, обладает ли последним свойством и алгебра $\mathbf{M}(G)$: верно ли, что простой гомоморфный образ $\mathbf{M}(G)$ обязательно конечномерен? В заметке на этот вопрос дается отрицательный ответ: существуют компактные группы G, для которых $\mathbf{M}(G)$ содержит такой максимальный двусторонний идеал $\mathbf{J}$, что $\mathbf{M}(G) / \mathbf{J}$ не только бесконечномерно, но и содержит «рассеянное» множество любой наперед заданной мощности.

§ 2. Начнем доказательство с конструирования максимальных идеалов некоторых алгебр операторов. Пусть H — конечномерное гильбертово пространство размерности d, $\mathfrak{B}(H)$ — алгебра всех линейных операторов на H, и пусть $\mathfrak{U}(H)$ — компактная группа унитарных операторов в $\mathfrak{B}(H)$. Для любого $A \in \mathfrak{B}(H)$ будем записывать AA^* в форме $\sum_{k=1}^{n} a_k P_k$, где P_k — проекции на попарно ортогональные одномерные подпространства H, а a_k —

неотрицательные действительные числа. Для $1 \leqslant p < \infty$ пусть $\| A \|_{\Phi_p} = \left(\sum_{k=1}^{d} a_k^{p/2} \right)^{1/p}$ и $\| A \|_{\Phi_\infty} = \max \{ a_1^{1/2}, a_2^{1/2}, \ldots, a_d^{1/2} \}$. Фон-Нейман (2) показал, что все функции $\| \cdot \|_{\Phi_p}$ являются нормами на $\mathfrak{B}(H)$. Легко показать, что и $\| \cdot \|_{\Phi_\infty}$ — операторная норма на $\mathfrak{B}(H)$.

Пусть теперь I — непустое множество индексов, и для каждого $i \in I$ пусть H_i — конечномерное гильбертово пространство размерности d_i. Пусть, наконец, $\mathfrak{E}_\infty(I)$ — множество всех элементов $A = (A_i)_{i \in I}$ декартова произведения $\prod_{i \in I} \mathfrak{B}(H_i)$ таких, что $\| A \| = \sup_{i \in I} \| A_i \|_{\Phi_\infty}$. $\mathfrak{E}_\infty(I)$ относительно покоординатных операций и определенной выше нормы является, очевидно, C^*-алгеброй с единицей, коммутативной, если и только если все $d_i = 1$.

§ 3. Следуя Райту (3), строим в $\mathfrak{E}_\infty(I)$ максимальные двусторонние идеалы.

3.1. Теорема 1. *Пусть $\mathcal{U}$ — любой ультрафильтр на множестве I, а $\mathfrak{I}_{\mathcal{U}}$ множество всех таких $A \in \mathfrak{E}_\infty(I)$, что*

$$\lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{d_i} \| A \|_{\Phi_1} = 0.$$

Тогда $\mathfrak{I}_{\mathcal{U}}$ — максимальный двусторонний идеал в $\mathfrak{E}_\infty(I)$, и, наоборот, любой максимальный двусторонний идеал в $\mathfrak{E}_\infty(I)$ имеет такую форму при надлежащем выборе ультрафильтра $\mathcal{U}$ на множестве индексов I.

3.2. Теорема 2. *Пусть для некоторого положительного целого m множество $\{i \in I: d_i \leqslant m\}$ принадлежит ультрафильтру $\mathcal{U}$. Тогда алгебра $\mathfrak{E}_\infty(I) / \mathfrak{I}_{\mathcal{U}}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{B}(L)$ для некоторого гильбертова пространства L размерности m.*

Пусть X — метрическое пространство и ρ — его метрика. Подмножество $S \subset X$ называем рассеянным, если существует такое положительное число α, что $\rho(x, y) \geqslant \alpha$ для любой пары x, y различных элементов из S.

3.3. Теорема 3. *Пусть для любого положительного целого m множество $\{i \in I : d_i > m\}$ принадлежит $\mathcal{U}$. Тогда фактор-алгебра $\mathfrak{E}_\infty(I) / \mathfrak{I}_{\mathcal{U}}$ содержит рассеянное множество S мощности $2^{\aleph_0}$ такое, что каждый элемент S имеет норму 1. В частности, фактор-алгебра бесконечномерна.*

3.4. Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Существуют такие множества индексов I мощности $\mathfrak{m}$, семейство конечномерных гильбертовых пространств $\{H_i\}_{i \in I}$ и ультрафильтр $\mathcal{V}$ на множестве I, что фактор-алгебра $\mathfrak{E}_\infty(I) / \mathfrak{I}_v$ содержит рассеянное множество мощности $2^{\mathfrak{m}}$, все элементы которого имеют нормой 1.*

§ 4. Применения к алгебре $\mathbf{M}(G)$. Пусть снова G — компактная группа. Двойственным к группе G объектом является множество Σ классов эквивалентностей непрерывных унитарных неприводимых представлений группы G. Таким образом, каждое $\sigma \in \Sigma$ есть класс попарно эквивалентных d_σ-мерных непрерывных унитарных неприводимых представлений G, где d_σ — некоторое положительное целое число. В каждом классе $\sigma \in \Sigma$ выберем по представлению $U^{(\sigma)} \in \sigma$. Представление $U^{(\sigma)}$ действует на d_σ-мерном гильбертовом пространстве H_σ. В H_σ выберем ортонормированный базис $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{d_\sigma}$. Пусть D_σ — сопряженно-линейный оператор на H_σ такой, что $D_\sigma \left(\sum_{k=1}^{\sigma} \alpha_k \zeta_k \right) = \sum_{k=1}^{\sigma} \bar{\alpha}_k \zeta_k$. Для $\mu \in \mathbf{M}(G)$ определяем преобразование Фурье — Стилтьеса $\hat{\mu}$ элемента μ как такой элемент из $\mathfrak{E}_\infty(\Sigma)$, что

$$\langle \hat{\mu}(\sigma) \xi, \eta \rangle = \int_G \langle D_\sigma U_x^{(\sigma)} D_\sigma \xi, \ \eta \rangle \, d\mu(x)$$

для всех $\xi, \eta \in H_\sigma$ и всех $\sigma \in \Sigma$. Отображение $\mu \mapsto \hat{\mu}$ — не увеличивающий норму инволютивный изоморфизм $\mathbf{M}(G)$ в $\mathfrak{E}_\infty(\Sigma)$. Для любого непустого подмножества $\mathrm{P} \subset \Sigma$ отображение $\mu \mapsto (\mu(\sigma))_{\sigma \in \mathrm{P}} = \hat{\mu} | \mathrm{P}$ есть не увеличивающий нормы инволютивный гомоморфизм $\mathbf{M}(G)$ в $\mathfrak{C}_\infty(G)$.

4.1. Определение. Непустое подмножество $\mathrm{P} \subset \Sigma$ называется множеством Сидона, если отображение $\mu \mapsto \hat{\mu} | \mathrm{P}$ есть гомоморфизм $\mathbf{M}(G)$ на $\mathfrak{C}_\infty(\mathrm{P})$.

4.2. Пример. Для любого индексированного семейства $\{H_i\}_{i \in I}$ конечномерных гильбертовых пространств произведение $L = \prod_{i \in I} \mathfrak{U}(H_i)$ является компактной группой, а отображение $(U_i)_{i \in I} \mapsto U_{i_0}$ является d_{i_0}-мерным непрерывным унитарным неприводимым представлением L для любого фиксированного $i_0 \in I$. В ([1]) было доказано (37.5), что множество всех таких представлений определяет множество Сидона в двойственном к L объекте.

4.3. Теорема 5. *Пусть G — компактная группа и* P — *множество Сидона в* Σ *такое, что* $\sup\{d_\sigma\colon \sigma \in \mathrm{P}\} = \infty$. *Тогда* $\mathbf{M}(G)$ *содержит максимальный двусторонний идеал* $\mathfrak{I}_\mathcal{U}$, *фактор-алгебра* $\mathbf{M}(G) / \mathfrak{I}_\mathcal{U}$ *по которому содержит рассеянное множество как в* (3.3).

4.4. Теорема 6. *Пусть L — группа, определенная в* (4.2), *и предположим, что* $\sup\{d_i\colon i \in I\} = \infty$. *Тогда* $\mathbf{M}(L)$ *содержит максимальный двусторонний идеал со свойствами, описанными в* (4.3).

4.5. Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{m}$ — *бесконечное кардинальное число. Существует такое произведение L, как в* (4.2), *и такой максимальный двусторонний идеал* $\mathfrak{I}$ *в* $\mathbf{M}(L)$, *что* $\mathbf{M}(L) / \mathfrak{I}$ *содержит рассеянное множество как в* (3.4).

Теоремы 5 и 6 прямо следуют соответственно из теорем 3 и 4. Нужно только заметить, что преобразование Фурье — Стилтьеса, ограниченное на P, есть гомоморфизм «на».

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Вашингтонский университет
США

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Кембриджский университет
Великобритания

Поступило
21 I 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Hewitt, K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Heidelberg — Berlin — N. Y. 1, 1963; 2, 1970. [2] И. Нейман, Изв. Н.-и. инст. матем. и мех. при Томском гос. унив. им. В. В. Куйбышева, 4, 205 (1962). [3] F. B. Wright, Ann. Math. (2) 60, 560 (1954).