Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 517.944 *МАТЕМАТИКА*

Н. Н. ЧАУС

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 26 IX 1969)

В заметке рассматривается вопрос о единственности решения задачи Коши вида

$$\partial u(X, t) / dt = \frac{1}{a} \Delta u(X, t) + q(X)u(X, t), \qquad u(X, t)|_{t=0} = u_0(X),$$

a — точка комплексной плоскости, $X \in R_n$ $(n = 1, 2, 3)$, Δ — оператор Лапласа в R_n.

Данный вопрос для случая $a > 0$ и непрерывного ограниченного коэффициента $q(X)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полностью решен в работе Г. Н. Золотарева ([1]). Для случая неограниченного $q(X)$ и $X \in R_1$ задача подробно исследована Я. И. Житомирским ([2]). Им получены необходимые и достаточные условия единственности решения задачи Коши, но вопрос рассматривается только для решений $u(X, t)$, которые определены при всех $t > 0$ и растут по t не быстрее чем e^{ct} $(c > 0)$.

Предлагаемая здесь методика, благодаря которой удается рассмотреть случай многих переменных, растущих $q(X)$ и $t \in [0, T]$, $T < \infty$, состоит в сведении исходного вопроса к аналогичному вопросу для уравнений с постоянными коэффициентами. В данном случае это достигается путем использования некоторых свойств решений соответствующих гиперболических уравнений. Для удобства чтения методика достаточно подробно излагается для случая $X = x \in R_1$.

Теорема 1. *Пусть $l(t)$, $t > 0$,— выпуклая кверху, положительная, медленно растущая функция, для которой интеграл*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{tl(t)} \tag{1}$$

расходится.

Тогда задача Коши

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + q(x) u(x, t), \quad u(x, t)|_{t=0} = u_0(x),$$

$t \in [0, T]$, $-\infty < x < \infty$, может иметь лишь одно решение $u(x, t)$, принадлежащее при каждом $t \in [0, T]$ классу функций $f(x)$ с условием

$$|f(x)| \leqslant C_f \exp\{|x|^2 l(|x|)\}, \tag{2}$$

если $p(x)$ — дифференцируемая и $q(x)$ — непрерывная функции, для которых имеют место оценки $(A > 0)$:

$$|q(x)| \leqslant (|x| + A)^2 l^2(|x|), \qquad |p(x)| + |p'(x)| \leqslant (|x| + A) l(|x|).$$

Заметим, что класс функций $f(x)$ с условием (2) перестает быть классом единственности решения данной задачи Коши при постоянных $p(x)$ и $q(x)$, если $l(t)$ такова, что интеграл (1) сходится ([3]).

Доказательство теоремы проведем сперва для случая $p(x) \equiv 0$. Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\partial^2\varphi(x, y) \,/\, \partial y^2 = \partial^2\varphi(x, y) \,/\, \partial x^2 + aq(x)\varphi(x, y) \tag{3}$$

и связанное с ним интегральное уравнение

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x+y) + \frac{a}{2}\int_0^y d\eta \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} q(\xi)\varphi(\xi, \eta)\,d\xi, \tag{4}$$

где $\varphi_0(x)$ — достаточно гладкая финитная функция.

Лемма. *Уравнение* (4) *имеет решение* $\varphi(x, y)$, *непрерывное во всей плоскости, финитное по* x *при каждом* y, *и для него при любом* $K > 0$ *выполняется оценка*

$$|\varphi(x, y)| \leqslant M_0 \exp\{(2|a| + K)(|y| + A + r_0)^2 l(2|y| + r_0) - \\ - K|x|^2 l(|x|)\}, \tag{5}$$

где $M_0 = \max\limits_x |\varphi_0(x)|$; r_0 — *число, зависящее лишь от* $\varphi_0(x)$.

Доказательство леммы. Определим для произвольной точки (x_0, y_0) область $\Omega_0 = \Omega(x_0, y_0)$, состоящую из точек $(x, y) = (x_0 + \lambda(y_0 - y), y)$, где λ меняется от -1 до 1, а y — между 0 и y_0. Введем пространство $C(\Omega_0)$ непрерывных на Ω_0 функций $\varphi(x, y)$ с нормой $\|\varphi\|_{\Omega_0} = \max\limits_{\Omega_0} |\varphi(x, y)|$. Если (4) записать в виде $\varphi = \varphi_0 + A\varphi$, где

$$(A\varphi)(x, y) = \frac{a}{2}\int_0^y d\eta \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} q(\xi)\varphi(\xi, \eta)\,d\xi,$$

и решать (4) в $C(\Omega_0)$ методом последовательных приближений ($\varphi_n = \varphi_0 + A\varphi_{n-1}$), то можно получить, что решение существует и

$$|\varphi(x_0, y_0)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |(A^n\varphi_0)(x_0, y_0)| \leqslant \\ \leqslant \max_{\Omega_0} |\varphi_0(x+y)| \exp\{|y_0| \sqrt{|a| \max_{\Omega_0} |q(\xi)|}\}. \tag{6}$$

Эта оценка справедлива при любых x_0, y_0. В частности, так как $\varphi_0(x) \equiv 0$ при $|x| > r_0$, то $\varphi(x_0, y_0) \equiv 0$ при $|x_0| > |y_0| + r_0$. В оставшейся части плоскости, т. е. при $|x_0| \leqslant |y_0| + r_0$, мы продолжим оценку (6), считая, что $|q(\xi)| \leqslant \omega(\xi) \equiv (|\xi| + A)^2 l^2(|\xi|)$. Это нам дает $\max\limits_{\Omega_0} |q(\xi)| \leqslant \omega(|x_0| + |y_0|)$, откуда

$$|\varphi(x_0, y_0)| \leqslant M_0 \exp\{|a|\,|y_0| \sqrt{\omega(2|y_0| + r_0)}\} = \\ = M_0 \exp\{|a|\,|y_0|(2|y_0| + r_0 + A) l(2|y_0| + r_0)\} \leqslant \\ \leqslant M_0 \exp\{2|a|(|y_0| + A + r_0)^2 l(2|y_0| + r_0)\} \leqslant \\ \leqslant M_0 \exp\{(2|a| + K)(|y_0| + A + r_0)^2 l(2|y_0| + r_0) - K|x_0|^2 l(|x_0|)\}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что расматриваемое решение $\varphi(x, y)$ является решением уравнения (3).

Теперь перейдем к нашей задаче Коши. Пусть $u(x, t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x)u(x, t), \quad u(x, t)|_{t=0} = 0$$

удовлетворяет условию $|u(x, t)| \leqslant C\exp\{|x|^2 l(|x|)\}$, и пусть $\varphi(x, y)$ —

решение уравнения (4). Рассмотрим функцию

$$F_\varphi(y, t) = (u(x, t), \varphi(x, y)) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\varphi(x, y)\,dx, \quad t \in [0, T], \quad -\infty < y < \infty.$$

Мы видим, что функция обладает свойствами:

а) $\frac{\partial}{\partial t} F_\varphi(y, t) = \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial y^2} F_\varphi(y, t)$;

б) $F_\varphi(y, 0) = 0$;

в) $|F_\varphi(y, t)| \leqslant C_1 \exp\{C_2(|y| + C_3)^2 l(|y| + C_3)\}$ $(C_1, C_2, C_3 > 0$ — постоянные).

Используя результаты по единственности решения задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами ([4]), получаем, что $F_\varphi(y, t) \equiv 0$, откуда $F_\varphi(0, t) = (u(x, t), \varphi_0(x)) \equiv 0$. Это справедливо при любой $\varphi_0(x) \in C_0^\infty$, откуда $u(x, t) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Если коэффициент $p(x) \not\equiv 0$, то метод доказательства остается тот же, но при разыскании решения $\varphi(x, y)$ гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi(x, y)}{\partial x^2} - a\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\varphi(x, y)) + aq(x)\varphi(x, y)$$

мы первоначально делаем замену $\varphi(x, y) = h(x)\varphi_1(x, y)$, $h(x) = \exp\left\{\frac{a}{2}\int_0^x p(\xi)\,d\xi\right\}$, что приводит к уравнению вида (3) для $\varphi_1(x, y)$. Этим теорема доказана.

При переходе к случаю $X \in R_n$ $(n = 2, 3)$ мы снова начинаем с рассмотрения соответствующих гиперболических уравнений

$$\partial^2\varphi(X, y) / \partial y^2 = \Delta\varphi(X, y) + aq(X)\varphi(X, y).$$

Использовав хорошо известные формулы для решения гиперболических уравнений с правой частью, можно составить для данных уравнений ($X \in R_2$ и $X \in R_3$) соответствующие интегральные уравнения $\varphi = \varphi_0 + A\varphi$, где в качестве φ_0 взять решения задач

$$\partial^2\varphi_0(X, y) / \partial y^2 = \Delta\varphi_0(X, y), \quad \varphi_0(X, y)|_{y=0} = \varphi_0(X) \in C_0^\infty(R_n),$$
$$\partial\varphi_0(X, y) / \partial y|_{y=0} = 0.$$

Если дополнительно предположить, что $q(X)$ непрерывны и $|q(X)| \leqslant (|X| + A)^2 l^2(|X|)$, $|X| = (\sum x_i^2)^{1/2}$, то по аналогии со случаем $X \in R_1$ для решений $\varphi(X, y)$ интегральных уравнений можно доказать предыдущую лемму.

В результате может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $l(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, $q(X)$, $X \in R_n$ $(n = 2, 3)$, имеет непрерывные вторые частные производные по x_i и с некоторым $A > 0$*

$$|q(X)| \leqslant (|X| + A)^2 l^2(|X|).$$

Тогда задача Коши

$$\frac{\partial u(X, t)}{\partial t} = \frac{1}{a}\Delta u(X, t) + q(X)u(X, t), \quad u(X, t)|_{t=0} = 0$$

имеет лишь нулевое решение $u(X, t)$, $t \in [0, T]$, в классе функций $f(X)$ с условием

$$|f(X)| \leqslant C_f \exp\{|X|^2 l(|X|)\}.$$

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
1 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Н. Золотарев, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 2 (3) (1958). [2] Я. И. Житомирский, ДАН, 171, № 1 (1966). [3] Г. Н. Золотарев, Уч. зап. Ивановск. пед. инст., 31 (1963). [4] Н. Н. Чаус, Укр. матем. журн., 17, № 1 (1965).