Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 1

УДК 62-50:519.95 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

Ю. М. ФАТКИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

(Представлено академиком В. А. Трапезниковым 9 VI 1971)

1. Предметом настоящей работы является анализ управления динамической системой, представленной в виде иерархической структуры. Динамическая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с общим функционалом L

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, u_r); \quad i, j = 1, \ldots, N; \quad r = 1, \ldots, m; \quad L = L(x_i(T)).$$

Полагаем, что если x_j входит в правую часть уравнения для $\dot{x}_i$, то x_i подчинено x_j. Такое предположение позволяет сопоставить динамической системе некоторый ориентированный граф. Предполагая далее, что у этого графа задана мажоранта, последовательной заменой контуров ориентированного графа новыми вершинами можно получить ориентированный граф без контуров, который, в свою очередь, преобразуется в иерархическую структуру (рис. 1). Число уровней S этой структуры равно трем. На каждом уровне расположено G_s вершин ($s = 1, \ldots, S$; $g = 1, \ldots, G_s$). Вершины далее именуются группами, так как каждая из этих вершин может состоять из нескольких точек, входящих в контур.

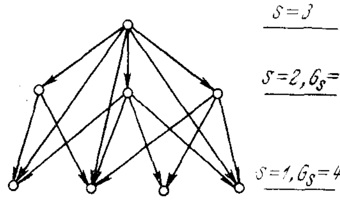

Рис. 1

2. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, представленных в виде иерархической структуры:

$$\dot{\mathbf{x}}^g = \widetilde{U}^g \mathbf{x}^g + \sum_{c=s+1}^{S-1} \sum_{q=1}^{G_c} \widetilde{A}^{gq} \widehat{U}^{gq} \mathbf{x}^q + \widetilde{B}^g \mathbf{f}^g(\mathbf{x}^s, \mathbf{u}^s),$$

$$\dot{\mathbf{x}}^S = \varphi(\mathbf{x}^S, \mathbf{u}^S), \tag{2,1}$$

$$g = 1, \ldots, G_s; \quad s = 1, \ldots, (S-2); \ \mathbf{x}^g = \{x_i^g\}; \quad i = 1, \ldots, n^g;$$

$$\mathbf{x}^q = \{x_j^q\}; \quad j = 1, \ldots, n^q.$$

В (2,1) индекс s указывает номер уровня, g — номер группы. В каждой ($g - s$)-группе введена матрица U^g, элементы которой суть управления. Размерность U^g — $((n^g + \sum_{q=1}^{s-1} G_q) \times n^g)$. Ограничения наложены на компоненты вектор-столбцов $\mathbf{u}_l^g$, $l = 1, \ldots, n^g$, или комбинации этих компонент. Далее введена матрица K^g той же размерности. Конструкция матрицы K^g такова, что она содержит не нулевые элементы только в первых n^g строках; элементы этой матрицы константы. Результат почленного умножения U^g и K^g есть квадратная матрица $\widetilde{U}^g$ (нулевые строки отброшены) с элементами $\tilde{u}_{il}^g = k_{il}^g u_{il}^g$, $i, l = 1, \ldots, n^g$. Матрица $\widetilde{A}^{gq}$, индексы которой показывают, в какую группу ($g - s$) из какой ($q - c$) входят фазовые координаты, образована почленным умножением матриц A^{gq} и D^{gq} с размерностями ($n^g \times n^q$). Элементы матрицы D^{gq} — константы, элементы

A^{gq} — управления, ограничения наложены на компоненты и их комбинации вектор-столбцов $\mathbf{a}_j^{gq}$, $j = 1, \ldots, n^q$. Аналогично образована матрица $\widetilde{B}^g$ размерностью $(n^g \times n^{gs})$, где n^{gs} — число компонент $\mathbf{f}^g(\mathbf{x}^s, \mathbf{u}^s)$. Элементы матрицы B^g — управления с ограничениями, наложенными на компоненты и их комбинации вектор-столбцов $\mathbf{b}_l^g$, $l = 1, \ldots, n^{gs}$. Матрица $\widehat{U}^{gq}$ образована так. Из матрицы U^q $(q = 1, \ldots, G_c;\ c = (s+1), \ldots, (S-1))$ взята строка, соответствующая $(g - s)$-группе, дополнена нулями до квадратной матрицы, а затем представлена как диагональная; таким образом, $\widehat{U}^{gq}$ — диагональная матрица.

Общий функционал системы

$$L(T) = \sum_{s=1}^{S-1} \sum_{g=1}^{G_s} c^g J^g + \int_0^T \varphi_0(\mathbf{x}^S, \mathbf{u}^S)\, dt, \qquad (2,2)$$

где $c^g = \text{const}$, $J^g = \int\limits_0^T \varphi^g dt$,

$$\varphi^g = (\widetilde{\mathbf{u}}_0^g, \mathbf{x}^g) + \sum_{c=s+1}^{S-1} \sum_{q=1}^{G_c} [\widetilde{\mathbf{a}}_0^{gq}, (\widehat{U}^{gq}\mathbf{x}^q)] + (\widetilde{\mathbf{b}}_0^g, \mathbf{f}^g). \qquad (2,3)$$

В (2,3) векторы $\widetilde{\mathbf{u}}_0{}^g$, $\widetilde{\mathbf{a}}_0{}^{gq}$, $\widetilde{\mathbf{b}}_0{}^g$ образованы аналогично вектор-строкам матриц $\widetilde{U}^g$, $\widetilde{A}^{gq}$, $\widetilde{B}^g$ соответственно, причем на управления, входящие в эти векторы, наложены ограничения, совместные с ограничениями на вектор-столбцы этих матриц. Имеет место

Теорема I. *Если задана динамическая система (2,1) с функционалом (2,2) и функции φ^g представимы в виде (2,3) и если на оптимальной траектории для всех фазовых координат, кроме фазовых координат высшего уровня, выполняются следующие условия: при $t \in [0, T]$ оптимальные значения фазовых координат нигде не меняют знака, т. е.*

$$[x_{i'}^g(t)]_{\text{opt}} > 0, \quad [x_{i''}^g(t)]_{\text{opt}} < 0, \quad x_i^g(0) = x_{i0}^g,$$

$$g = 1, \ldots, G_s; \quad s = 1, \ldots, (S-1); \quad i' = 1, \ldots, n^{g'}; \quad i'' = 1, \ldots, ng'';$$

$$n^{g'} + n^{g''} = n^g; \quad i = 1, \ldots, n^g,$$

то справедливо равенство

$$\max_{\substack{U^g,\ A^{gq}B^g,\ \mathbf{u}^S \\ (g=1,\ldots,G_s;\ s=1,\ldots,(S-2);\ q=1,\ldots,G_c;\ c=(s+1),\ldots,(S-1))}} L = \max_{\mathbf{u}^s} \Bigg[\int_0^T \varphi_0(\mathbf{x}^S, \mathbf{u}^S)\, dt +$$
$$+ \Bigg(\sum_{g=1}^{G_{S-1}} \max_{U^g A^{gs},\ B^g} J^g + \Bigg(\sum_{g=1}^{G_{S-2}} \max_{\substack{U^g,\ A^{gq},\ B^g \\ (q=1,\ldots,G_c;\ c=S-1)}} J^g +$$
$$+ \Bigg(\ldots + \Bigg(\sum_{g=1}^{G_1} \max_{\substack{U^g,\ A^{gq},\ B^g \\ (q=1,\ldots,G_c;\ c=2,\ldots,(S-1))}} J^g \Bigg) \ldots \Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg], \qquad (2,4)$$

в котором скобки в правой части указывают на последовательность действий при определении оптимальных значений управлений и фазовых координат: первые определяются автономно в группах, начиная с низшего уровня до высшего, вторые — с высшего до низшего.

Для доказательства теоремы использован формализм развитий на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Замечание 1. Теорема I справедлива для системы дифференциальных уравнений, в которых управляющие функции входят в правые части линейно, и представимых в виде иерархической структуры. В этом случае можно рассматривать элементы матриц U^g как произведения на фазовые координаты, скорость изменения которых равна нулю.

Замечание 2. Представление об иерархических структурах, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений, может быть расширено и на статический случай. Если при этом учесть замечание 1, то положения теоремы могут быть распространены на задачу линейного программирования.

3. Далее делаются предположения о том, что в каждой из $(g-s)$-групп системы (2,1), включая группу высшего уровня, существуют противоположные «интересы». В соответствии с этим предположением можно выделить управления, максимизирующие и минимизирующие групповые функционалы. Имея в виду сделанные предположения, можно утверждать, что система (2,1) описывает некоторую дифференциальную игру с функционалом (ценой игры) (2,2). Для полученной дифференциальной игры формулируется

Теорема II. *Если дифференциальная игра описывается системой дифференциальных уравнений вида* (2,1) *с функционалом* (2,2), *где* φ^g *представлены в виде* (2,3), *то справедливо равенство*

$$\max_{\substack{\mathbf{w}_\mathrm{I}^g,\, \mathbf{w}_\mathrm{I}^S \\ (g=1,\ldots,G_s;\; s=1,\ldots,(S-1))}} \min_{\mathbf{w}_\mathrm{II}^g \mathbf{w}_\mathrm{II}^S} L = \max_{\mathbf{w}_\mathrm{I}^S} \min_{\mathbf{w}_\mathrm{II}^S} \Bigg[\int_0^T \varphi_0(\mathbf{x}^S, \mathbf{W}_\mathrm{I}^S, \mathbf{W}_\mathrm{II}^S)\, dt +$$

$$+\Bigg(\sum_{g=1}^{G_{S-1}} \max_{\mathbf{w}_\mathrm{I}^g} \min_{\mathbf{w}_\mathrm{II}^g} J^g + \Bigg(\sum_{g=1}^{G_{S-2}} \max_{\mathbf{w}_\mathrm{I}^g} \min_{\mathbf{w}_\mathrm{II}^g} J^g + \Bigg(\ldots + \Bigg(\sum_{g=1}^{G_1} \max_{\mathbf{w}_\mathrm{I}^g} \min_{\mathbf{w}_\mathrm{II}^g} F^g\Bigg)\ldots\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg] \tag{3,1}$$

в котором скобки в правой части указывают на последовательность действий при определении оптимальных стратегий и фазовых координат: первые определяются автономно в группах, начиная с низшего уровня до высшего, вторые — с высшего до низшего; элементы вектор-функций $\mathbf{W}_\mathrm{I}^g$, $\mathbf{W}_\mathrm{II}^g$ — *компоненты матриц* U^g, A^{gq}, B^g, *разделенных в соответствии с интересами сторон.*

Замечание 1. В случае статической задачи (см. замечание 2 к теореме I) теорема II может быть использована для решения бесконечной или матричной игры двух лиц с нулевой суммой.

Замечание 2. Если для сформулированной дифференциальной игры $\max\min L \neq \min\max L$, то вопрос о выборе оптимальных стратегий остается открытым, однако положения теоремы II справедливы.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
24 V 1971