

А. М. ФРИДМАН, И. Г. ШУХМАН

КОЛЛЕКТИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ВРАЩАЮЩИХСЯ МАСС

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 8 IX 1970)

1. В работах (¹⁻⁵) исследовалась устойчивость сферически-симметричной системы вращающихся по круговым траекториям гравитирующих частиц.

Случай круговых орбит является вырожденным в том смысле, что частота коллективных колебаний не зависит от радиального волнового числа. Исходя из аналогии с плазменными средами, можно предположить, что вырождение снимается, если частицы имеют радиальную скорость (случай некруговых траекторий). Для такой системы, однако, возникает вопрос о равновесной функции распределения.

В п.2 найден класс стационарных решений исходной системы уравнений (кинетического уравнения и уравнения Пуассона) при условии малого отклонения формы траекторий от круговой. В случае, когда плотность частиц $n(r) \sim 1/r^2$, решение системы стационарных уравнений имеет вид, найденный методом инвариантов в (⁶).

В п.3 показана устойчивость однородного шара и вычислены первые частоты коллективных колебаний в случае, когда траектории частиц отличаются от круговых.

2. Стационарные функции распределения для орбит близких к круговым. Рассматривается сферически-симметричная система гравитирующих частиц, вращающихся в самосогласованном поле. Система в стационарном состоянии характеризуется не зависящими от времени функцией распределения $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и гравитационным потенциалом $\Phi_0(r)$. Полной системой уравнений, требующей самосогласованного решения, являются кинетическое уравнение Больцмана — Власова и уравнение Пуассона:

$$Lf + v_r \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{v_{\perp}}{r} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \right) + \left(\frac{v_{\perp}^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{1}{r} \left(\cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} + \frac{1}{rv_{\perp}} \left(\sin \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0; \quad (1)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \int f(r, v_r, v_{\perp}, \alpha) dv_r v_{\perp} dv_{\perp} d\alpha. \quad (2)$$

Здесь выбрана обычная сферическая система координат, а вместо v_{θ} и v_{φ} введены переменные $v_{\perp}$ и α ;

$$v_{\perp}^2 = v_{\theta}^2 + v_{\varphi}^2, \quad \alpha = \arctg(v_{\varphi}/v_{\theta}), \quad (3)$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_{\perp}}{r} \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \alpha \cot \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right).$$

Интересуясь изотропными сферически-симметричными стационарными решениями, из (1) и (2) получим

$$v_r \left(\frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{v_{\perp}}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \right) + \left(\frac{v_{\perp}^2}{r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_r} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Phi_0(r)) = 4\pi G r^2 n_0(r) = 8\pi^2 G r^2 \int f(r, v_{\perp}, v_r) v_{\perp} dv_{\perp} dv_r.$$

Сразу видно одно решение

$$f_0 = A(r) \delta(v_r) \delta(v_\perp - v_0), \quad (5)$$

$$A = n(r)/(2\pi v_0), \quad v_0^2 = r \partial \Phi_0 / \partial r,$$

которое соответствует движению частиц точно по круговым траекториям. Другое частное решение находим разделением переменных, которое дает функцию, найденную в (7),

$$f_0(v_r, v_\perp, r) = \frac{\beta}{2\pi r^2} \frac{v_\perp^{2(4\pi G\beta/2\theta - 1)}}{2\pi \sqrt{2\pi\theta} (2\theta)^{4\pi G\beta/2\theta} \Gamma(4\pi G\beta/2\theta)} \exp\left(-\frac{v_r^2 + v_\perp^2}{2\theta}\right). \quad (6)$$

δ -Образный характер этой функции в точке $v_\perp = (4\pi G\beta)^{1/2} \equiv v_0$ показывает, что пределом f_0 при малых θ будет некоторый ряд из δ -функций и ее производных.

Разложение производится по стандартной процедуре

$$g(x) = \sum_n \gamma_n \delta^{(n)}(x - x_0), \quad \gamma_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int g(x) (x - x_0) dx,$$

и для функции (6) дает

$$f_0 = \left(\frac{1}{v_0} \delta_r \delta_\perp \left(1 + \frac{3}{8x}\right) + \frac{\theta}{2v_0} \delta_r \delta_\perp + \frac{3}{8x} \delta_r \delta'_\perp + \frac{v_0}{8x} \delta_r \delta''_\perp\right) \frac{\beta}{2\pi r^2}, \quad (7)$$

$$\delta_r \equiv \delta(v_r), \quad \delta_\perp \equiv \delta(v_\perp - v_0), \quad x = 4\pi G\beta / (2\theta).$$

Заметим, что в силу (5) разложение типа (7) имеет место и для произвольной зависимости $n(r)$, а коэффициенты при произведениях $\delta_r^{(n)}(x) \delta_\perp^{(m)}(x)$ подбираются так, чтобы функция удовлетворяла системе (4).

Покажем, как проводится разложение по малой температуре в случае произвольной плотности. Представляем f_0 в виде

$$f_0 = A\delta(v_r) + B\delta''(v_r), \quad (8)$$

где B содержит малый параметр θ .

Подставляя (8) в (4), получим уравнение

$$-2\delta'_r \left(\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r} \frac{\partial B}{\partial v_\perp}\right) + \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) (A\delta'_r + B\delta''_r) = 0, \quad (9)$$

которое приводит к системе

$$-2 \left(\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r} \frac{\partial B}{\partial v_\perp}\right) + A \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = 0; \quad (10)$$

$$B(v_\perp^2/r - \partial \Phi / \partial r) = 0. \quad (11)$$

Отсюда заключаем, что $B = b(r) \delta(v_\perp - v_0)$.

Представляя A в виде

$$A = a\delta(v_\perp - v_0) + a_1\delta'(v_\perp - v_0) + a_2\delta''(v_\perp - v_0), \quad (12)$$

из (10) получаем уравнения

$$b' + \frac{b}{r} + \frac{v_0}{r} a_1 - \frac{a_2}{r} = 0; \quad (13)$$

$$v_0 b' + \frac{v_0}{r} b - \frac{2v_0}{r} a_2 = 0. \quad (14)$$

Учтем уравнение Пуассона. Оно дает связь между a и a_1 :

$$(rv_0^2)' = 8\pi^2 G r^2 (av_0 - a_1). \quad (15)$$

Из (21) имеем

$$a = \frac{1}{2\pi v_0} \frac{1}{r^2} \frac{(rv_0^2)'}{4\pi G} + \frac{a_1}{v_0} = \frac{n_0(r)}{2\pi v_0} + \frac{a_1}{v_0}. \quad (16)$$

Уравнения (13), (14) и (16) представляют систему трех уравнений с 4 неизвестными функциями b , a , a_1 , a_2 . Поэтому одна из функций может быть выбрана произвольно.

По аналогии с (7) удобно выбирать коэффициент b так, чтобы он имел вид $\frac{\theta}{2} \frac{n_0(r)}{2\pi v_0(r)}$. Тогда θ имеет смысл малой температуры.

3. Коллективные колебания однородного шара при наличии малой температуры. Учет влияние небольшого теплового разброса на устойчивость однородного шарового скопления. Невозмущенная функция распределения, согласно п.2, имеет вид

$$f_0 = \frac{n_0}{2\pi v_0} \left\{ \delta_r \delta_{\perp} \left(1 + \frac{\theta}{2v_0^2} \right) + \delta_r \delta'_{\perp} \frac{\theta}{2v_0} + \frac{\theta}{2} \delta_r \delta''_{\perp} + \frac{\theta}{2} \delta_{\perp} \delta'_r \right\}, \quad (17)$$

где $\delta_r = \delta(v_r)$, $\delta_{\perp} = \delta(v_{\perp} - v_0)$ и θ — средний квадрат радиальной скорости.

Возмущенную функцию f_1 ищем в виде

$$f_1 = A \delta_r \delta_{\perp} + B \delta_r \delta'_{\perp} - C \delta_r \delta_{\perp} + \theta [C_1 \delta_r \delta'_{\perp} + C_2 \delta_r \delta''_{\perp} + C_3 \delta_r \delta'_{\perp} + C_4 \delta_r \delta'''_{\perp} + C_5 \delta_r \delta''_{\perp} + C_6 \delta_r \delta'_{\perp} + C_7 \delta_r \delta_{\perp}]. \quad (18)$$

Для коэффициентов $A, B, C, C_1, \dots, C_7$ получаем систему 10 уравнений

$$L_0 A - \frac{L_1}{v_0} B + C' + \frac{1}{r} C = 0; \quad (19)$$

$$L_0 B - \frac{2\theta}{v_0} L_1 C_2 - 2\Omega C - \theta C'_1 - \frac{2\theta}{r} C_1 = \frac{1}{v_0} L_1 \Phi_1 \frac{n_0}{2\pi v_0} \left(1 + \frac{\theta}{2v_0^2} \right); \quad (20)$$

$$-L_0 C - \frac{\theta}{v_0} L_1 C - 2\theta C'_7 - \frac{2\theta}{r} C_7 - 2\Omega B + \frac{2\theta}{r} C_2 = \Phi'_1 \frac{n_0}{2\pi v_0} \left(1 + \frac{\theta}{2v_0^2} \right); \quad (21)$$

$$L_0 C_1 - \frac{2L_1}{v_0} C_3 - 2C'_6 + 2\Omega C_7 - \frac{4}{r} C_6 + 2\Omega C_7 - 4\Omega C_2 + \frac{6C_4}{r} = \frac{n_0}{2\pi v_0} \frac{\Phi'_1}{2v_0}; \quad (22)$$

$$L_0 C_2 - \frac{3L_1}{v_0} C_4 + \Omega C_1 - C'_3 + \Omega C_1 - \frac{3}{r} C_3 = \frac{1}{2v_0^2} L_1 \Phi_1 \frac{n_0}{2\pi v_0}; \quad (23)$$

$$L_0 C_3 + 4\Omega C_6 - 6\Omega C_4 = \Phi'_1 n_0 / (2 \cdot 2\pi v_0); \quad (24)$$

$$L_0 C_4 + 2\Omega C_3 = \frac{1}{2v_0} L_1 \Phi_1 \frac{n_0}{2\pi v_0}; \quad (25)$$

$$L_0 C_5 - 2\Omega C_6 = \Phi'_1 n_0 / (4\pi v_0); \quad (26)$$

$$L_0 C_3 + 6\Omega C_5 - 4\Omega C_3 = \frac{1}{2v_0} L_1 \Phi_1 \frac{n_0}{2\pi v_0}; \quad (27)$$

$$L_0 C_7 - \frac{L_1}{v_0} C_6 - 3C'_5 - 3\frac{C_5}{r} - 2\Omega C_1 + \frac{2}{r} C_3 = 0. \quad (28)$$

Здесь $L_1 = L_0 - \partial / \partial t$, $L_0 = L(v_0)$, $\Omega = v_0 / r = \text{const}$,

$$n_1 = \int_0^{2\pi} (A v_0 - B) da. \quad (29)$$

В этой системе согласно ⁽²⁾ L_0 можно рассматривать как множитель, равный $-i(\omega - s\Omega) \equiv -i\omega_s$, и найти A_s и B_s . Возмущенная плотность n_1 выражается тогда как

$$n_1(r) = \sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(0)|^2 (A_s v_0 - B_s). \quad (30)$$

Последовательность решения системы уравнений (19)–(28) состоит в следующем: из уравнений (24)–(27) находим C_3, C_4, C_5, C_6 ; далее из уравнений (22), (23), (28) найдем C_1, C_2, C_7 и из (19)–(21) A, B, C . Громоздкие вычисления приводят к выражению для n_1

$$n_1 = n_0 \left\{ \sum_{s=-1}^l |P_{s0}^l(0)|^2 \frac{1}{4\Omega^2 - \omega_s^2} \Delta \Phi + \sum_{s=-1}^l \frac{|P_{s0}^l(0)|^2 3\theta}{(4\Omega^2 - \omega_s^2)(16\Omega^2 - \omega_s^2)} \Delta(\Delta \Phi_1) \right\}. \quad (31)$$

Это дает возможность получить уравнение для возмущенной плотности

$$\Delta n_1 + k^2 n_1 = 0. \quad (32)$$

$$k^2 = \frac{1}{3\theta} \frac{\sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(0)|^2 \frac{\omega_s^2 - \Omega^2}{4\Omega^2 - \omega_s^2}}{\sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(0)|^2 3\Omega^2 / [(4\Omega^2 - \omega_s^2)(16\Omega^2 - \omega_s^2)]}. \quad (33)$$

Уравнение (33) представляет искомое дисперсионное соотношение, дающее связь между волновым вектором k и частотой ω возмущения.

Разрешая (33) относительно ω , мы должны отобрать те ветви спектра, которые дают правильный предельный переход при $\theta \rightarrow 0$, когда собственные частоты колебаний определяются из уравнения ⁽²⁾

$$\sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(0)|^2 \frac{\omega_s^2 - \Omega^2}{4\Omega^2 - \omega_s^2} = 0. \quad (34)$$

Для случая $l=0$ получаем

$$\omega^2 = \Omega^2 + \frac{3}{5} k^2 v_T^2, \quad (35)$$

где $v_T^2 = \theta$.

Для $l=2$

$$\omega_1^2 = 3,1\Omega^2 + 7,4k^2v_T^2, \quad \omega_2^2 = 13,9\Omega^2 + 0,5k^2v_T^2, \quad (36)$$

и т. д.

Таким образом, мы видим, что учет дисперсии скоростей не приводит к нарушению устойчивости однородного шара. Более того, в этом случае уже можно говорить о коллективных частотах (35), (36) и т. д.

4. Уравнение для возмущенного потенциала неоднородной системы в случае небольшого разброса мы не привели ввиду его чрезмерной громоздкости. Результат исследования его решений, однако, очевиден заранее: аналогично (35), (36) частоты колебаний при $\theta=0$, полученные в ^(2, 4), в случае $\theta \neq 0$ оказываются «размазанными» на величину kv_T . Однако согласно ⁽⁴⁾ эти колебания будут затухающими в отличие от нейтральных коллективных колебаний однородной системы (35), (36) и т. д. ^{*}

Заметим, что учет конечного радиуса реального скопления уже при наличии небольшой температуры приводит к «испарению» звезд из скопления, т. е. к перестройке стационарного распределения. Очевидно, отклонение реальной функции распределения от стационарной будет тем заметнее, чем больше температура системы и чем меньше убывающая с радиусом плотность системы отличается от однородной. В рассмотренном здесь случае, когда температура мала, а плотность убывает $\sim 1/r^2$, учет конечности радиуса системы показывает, что уход звезд из скопления будет весьма незначительным. Вследствие этого рассмотренные функции распределения в приложении к реальным скоплениям можно считать квазистационарными.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. Б. Михайловскому за полезное обсуждение вопросов, рассмотренных в данной работе. Один из авторов (И. Г. Шухман) благодарит А. З. Паташинского за обсуждение § 2.

Новосибирский государственный университет

Поступило
5 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, А. М. Фридман, ДАН, 182, 794 (1968). ² А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, Я. Г. Эпельбаум, ЖЭТФ, 59, 1608 (1970). ³ В. С. Сынах, А. М. Фридман, И. Г. Шухман, Астрофизика, № 3 (1971). ⁴ А. М. Фридман, Астрон. журн., № 8 (1971). ⁵ А. Томме, Astrophys. J., 139, 1271 (1964). ⁶ В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, Астрон. журн., Краткие сообщения, № 5 (1971). ⁷ Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Астрофизика, № 5, 223 (1969).

* Причина различия однородной и неоднородной систем, проявляющаяся в отсутствии у неоднородной системы нейтральных колебаний, обсуждается в заключении работы ⁽⁴⁾.