

М. И. ШАБУНИН

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ МНОГОЧЛЕНАМ В ОБОБЩЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 VI 1971)

Пусть функция $u(z)$ и ее производная $u'(z)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $u(z)$ регулярна в односвязной области G ;
- 2) точка z_0 ($z_0 \in G$) является нулем функции $u'(z)$; функция $u'(z)$ либо не имеет в области G нулей, отличных от z_0 , либо имеет конечное число нулей и для каждого нуля z_k ($k = 1, 2, \dots, p$) функции $u'(z)$ выполняется условие

$$|u(z_0)| < |\dot{u}(z_k)|;$$

- 3) функция $u(z)$ ($u(0) = 0$) однолистка в области D ($D \subset G$); область D отображается функцией $w = u(z)$ на круг с центром в точке $w = 0$ радиуса $\rho = |u(z_0)| + \delta$ ($\delta > 0$) с разрезом, соединяющим точку $w_0 = u(z_0)$ с точкой

$$w_1 = \rho \exp [i \arg u(z_0)].$$

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(z) = u_0(z) \cdot u_1(z) \cdot \dots \cdot u_n(z), \quad (1)$$

где $u_0(z) \equiv 1$, а функции $u_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) регулярны в области Ω ($G \subset \Omega$), $u_k(0) = 0$, $u'_k(0) = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) и, кроме того, функции $u_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) не имеют в области Ω нулей, отличных от $z = 0$.

Пусть последовательность функций $\{u_n(z)\}$ сходится в области Ω к функции $u(z)$, причем характер сходимости определяется условиями

$$\frac{u'_k(z)}{u_k(z)} = \frac{u'(z)}{u(z)} + \frac{1}{k} \psi(z) + \frac{1}{k^2} \psi_k(z), \quad (2)$$

где $\psi(z)$, $\psi_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) — функции, регулярные в области Ω , а последовательность $\{\psi_k(z)\}$ равномерно ограничена в области Ω .

Тогда система (1) образует базис в области D_1 ($D_1 \subset D$), которая отображается функцией $w = u(z)$ на круг $|w| < |u(z_0)|$ ⁽³⁾ и, следовательно, всякая функция, регулярная в D_1 , может быть разложена в ряд по системе (1):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(z). \quad (3)$$

Для коэффициентов c_m разложения (3) при наличии условий (2), как показано в ⁽⁵⁾, имеет место асимптотическая формула

$$c_m \sim \lambda a_m, \quad (4)$$

где λ — некоторая постоянная, а α_m — коэффициент при $u^m(z)$ в разложении функции $f(z)u^m(z)/f_m(z) = \mu(z)$ по степеням $u(z)$. Основная идея доказательства формулы (4) связана с оценкой коэффициентов c_m из рекуррентных соотношений вида

$$\alpha_m = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \beta_{k,m} + c_m,$$

которые получаются при разложении функции $\mu(z)$ по степеням $u(z)$. Коэффициенты α_m и $\beta_{k,m}$ представляются в виде интегралов по замкнутой контуре, а эти интегралы оцениваются методом перевала (2).

Результаты, содержащиеся в (5), можно существенно усилить, рассматривая вместо условий (2) следующие условия:

$$\frac{u'_k(z)}{u_k(z)} = \frac{u'(z)}{u(z)} + \alpha_k \psi(z) + \beta_k \psi_k(z), \quad (5)$$

где ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|$ сходится, а числовая последовательность $\{\alpha_k\}$, такова, что

$$0 < \alpha_{k+1} \leq \alpha_k \quad (k \geq k_0); \quad (6)$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty); \quad (7)$$

$$\text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\sqrt{k}} \text{ сходится.} \quad (8)$$

Действительно, анализ доказательства основной теоремы статьи (5) показывает, что эта теорема остается в силе, если последовательность $\{\alpha_k\}$ удовлетворяет, наряду с условиями (6), (7), следующим условиям:

$$1) A_n / \sqrt{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty; \quad (9)$$

$$2) \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{k^{3/2}} \text{ сходится;} \quad (10)$$

3) существует функция $\varphi(n)$ такая, что $\varphi(n) \rightarrow \infty$, $\varphi(n)/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, кроме того,

$$\sum_{k=n-\varphi(n)}^n (A_n - A_k) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Если выполнены условия (6) — (8), то условие (9) вытекает из леммы Кронекера (4) (стр. 252—253).

Справедливость условия (10) можно установить, применив к сумме $n+p+1$

$$\sum_{k=n}^n \frac{A_k}{k^{3/2}} \text{ преобразование Абеля.}$$

Наконец, условия (11) будут выполнены, если положить $\varphi(n) = [n^{1/4}]$.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Если последовательность функций $\{u_n(z)\}$ сходится к функции $u(z)$ и при этом выполнены условия (5), (6) — (8), а функция $u(z)$ удовлетворяет требованиям, указанным в начале статьи, то для коэффициентов разложения (3) по системе (1) имеет место асимптотическая формула (4).

Теорему 1 можно использовать для асимптотической оценки интерполяционных многочленов $P_n(z)$ как коэффициентов разложения

$$e^{z\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \cdot f_n(\zeta). \quad (12)$$

Вопрос об оценке многочленов $P_n(z)$ возникает в связи с задачей о восстановлении целой функции первого порядка и конечного типа $F(z)$ по системе функционалов вида

$$L_n(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(\zeta) \cdot f_n(\zeta) d\zeta. \quad (13)$$

Эта задача является естественным обобщением проблемы моментов А. О. Гельфонда (¹) (для последней $f_n(\zeta) = [u(\zeta)]^n$).

Функция $F(z)$ восстанавливается по системе функционалов (13) с помощью ряда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \cdot L_n(F). \quad (14)$$

Применив теорему 1 к функции $e^{z\zeta}$, получаем следующую теорему 2.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для интерполяционных многочленов $P_n(z)$ задачи (12) — (14) справедлива асимптотическая формула

$$P_n(z) \sim C(z) \cdot a_n(z),$$

где $C(z)$ — некоторая функция, не зависящая от n , $a_n(z)$ — коэффициент при $u^n(\zeta)$ в разложении функции $e^{z\zeta} u^n(\zeta) / f_n(\zeta)$ по степеням $u(\zeta)$.

Московский физико-технический институт
г. Долгопрудный Моск. обл.

Поступило
27 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, 1959. ² М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, 1962. ³ М. А. Евграфов, А. Д. Соловьев, ДАН, 113, № 3 (1957). ⁴ Лоэв, Теория вероятностей, М., 1962. ⁵ М. И. Шабунин, Сибирск. матем. журн., 4, № 2 (1963).