

Т. Х. ШАРИШОВ

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ОШИБКИ
КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ С РЕГУЛЯРНЫМ
В СМЫСЛЕ С. Л. СОБОЛЕВА ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ
В ПРОСТРАНСТВАХ $H_p^\mu(\Omega)$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 7 VI 1971)

В работе (1) С. Л. Соболев дал алгоритм построения кубатурных формул, названных им формулами с регулярным пограничным слоем, и оценил сверху норму функционала ошибки этих формул в пространстве U_2^m . Этот же результат был получен в пространствах $H_2^\mu(\Omega)$ в работе (2). При оценке нормы функционала ошибки таких формул авторы пользовались явным видом экстремальной функции периодического функционала $l_\infty(x) = 1 - h^n \sum \delta(x - hH_\nu)$ в этих пространствах и свойством гильбертовости таких пространств. В случае банаховых пространств исследование поведения таких формул представляет очень трудную задачу.

В настоящей работе мы оценим сверху, с выделением главного члена, норму функционала ошибки кубатурных формул с регулярным в смысле С. Л. Соболева пограничным слоем в пространствах $H_p^\mu(\Omega)$. Пусть x — переменная точка n -мерного евклидова пространства E_n , а ξ — переменная точка n -мерного евклидова пространства E^n .

Мы скажем, что обобщенная функция $u(x) \in S'$ принадлежит пространству $H_p^\mu(\Omega)$, если

$$\theta(x) = F^{-1}(\mu(\xi) \cdot Fu(x)) = F^{-1}(\mu(\xi) * u(x)) \in L_p(E_n) \quad (1)$$

С введением нормы $\|u(x)\|_{H_p^\mu(E_n)} = \|\theta(x)\|_{L_p(E_n)} H_p^\mu(E_n)$ становится полным рефлексивным банаховым пространством.

Пусть Ω — ограниченная область с достаточно хорошей границей Γ в E_n .

Через $\hat{H}_p^\mu(\Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $\|\cdot\|_{H_p^\mu(E_n)}$ и введем пространство

$$H_p^\mu(\Omega) = H_p^\mu(E_n) / \hat{H}_p^\mu(E_n \setminus \bar{\Omega})$$

с нормой

$$\|u(x)\|_{H_p^\mu(\Omega)} = \inf \|u^c(x)\|_{H_p^\mu(E_n)}, \quad u(x) \in H_p^\mu(\Omega),$$

где нижняя грань берется по всем продолжениям элемента $u(x) \in H_p^\mu(\Omega)$ до элементов $u^c(x) \in H_p^\mu(E_n)$; $H_p^\mu(\Omega)$ также является банаховым пространством. На весовой функцию $\mu(\xi)$ накладываем следующие условия:

$$1) \nu(x) = F^{-1}\left(\frac{1}{\mu(\xi)}\right) \in L_q(E_n), \quad 1/q + 1/p = 1, \quad p \geq 2$$

(условие вложения в пространство C);

$$2) \mu(h^{-1}x) \sim h^m \mu'(x);$$

$$3) |D^\alpha \nu(x)| \leq \text{const} \frac{e^{-|x|}}{|x|^{(n-m+1)/2}} \quad (|x| > 1, n, m, \alpha \text{ любые}), \text{ где } D^\alpha —$$

оператор дифференцирования порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$;

$$4) |D^\alpha v(x)| \leq c \cdot |x|^{m-n-|\alpha|} \quad (|x| \leq 1, m-n-|\alpha| < 0);$$

$$5) |D^\alpha \bar{v}(x)| = |F^{-1} \left(\frac{1}{\mu^2(\xi)} \right)| \leq c \cdot |x|^{-n+2m-|\alpha|} \quad (|x| \leq 1, 2m > n);$$

$$6) |D^\alpha \bar{v}(x)| \leq c \frac{e^{-|x|}}{|x|^{(n-2m+1)/2}} \quad (|x| > 1, n, m, \alpha \text{ любые}).$$

Подробная теория таких пространств содержится в работе (3).

Сформулируем основной результат.

Теорема. В пространстве $H_p^\mu(\Omega)$ норма функционала погрешности кубатурной формулы с регулярным в смысле С. Л. Соболева пограничным слоем удовлетворяет неравенству

$$\|l(x)\|_{H_p^{\mu*}(\Omega)} \leq h^m (\text{mes})^{1/q} \left\{ \int_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(2\pi i \gamma h^{-1} H^{-1} x)}{\mu'(\gamma H^{-1})} \right|^q dx \right\}^{1/q} + O(h^{m+1}), \quad (2)$$

при $h \rightarrow 0$. Здесь H — матрица $n \times n$, $|H| = 1$, Ω_0 — фундаментальная область, определяемая матрицей H .

Доказательство основано на двух леммах.

Лемма 1. Пусть функционалы $l_1(x)$ и $l_2(x)$ удовлетворяют условиям

$$\text{supp}(l_1(x)) \subset \mathcal{E}(|x| < L_1), \quad \text{supp}(l_2(x)) \subset \mathcal{E}(|x| < L_2); \quad (3)$$

$$\|l_1(x)\|_{C^*} \leq A_1, \quad \|l_2(x)\|_{C^*} \leq A_2; \quad (4)$$

$$(l_1(x), x^\alpha) = 0, \text{ если } |\alpha| \leq k_1 - 1, \quad (5)$$

$$(l_2(x), x^\alpha) = 0, \text{ если } |\alpha| = k_2 - 1,$$

и пусть

$$\bar{v}(x) = F^{-1}(1/\mu^2(\xi)). \quad (6)$$

Тогда

$$\left| l_1\left(\frac{x}{h}\right) * \bar{v}(x) * l_2\left(\frac{x}{h}\right) \right| \leq B \begin{cases} h^{2m+n}, & |x| \leq (L_1 + L_2)h, \\ h^{2n+k_1+k_2} \frac{1}{|x|^{n-2m+k_1+k_2}}, & (L_1 + L_2)h < |x| \leq 1, \\ h^{2n+k_1+k_2} \frac{e^{-|x|}}{|x|^{(n-2m+1)/2}}, & |x| > 1. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы из (1), стр. 9.

Лемма 2. Пусть функционал $l(x)$ удовлетворяет условиям

$$\text{supp}(l(x)) \subset \mathcal{E}(|x| < L); \quad (8)$$

$$\|l(x)\|_{C^*} \leq A; \quad (9)$$

$$(l(x), x^\alpha) = 0, \text{ если } |\alpha| < k, \quad (10)$$

и пусть

$$v(x) = F^{-1}(1/\mu(\xi)).$$

Тогда

$$\left| v(x) * l\left(\frac{x}{h}\right) \right| \leq B \begin{cases} h^{n+k} \frac{1}{|x|^{n-m+k}}, & Lh < |x| \leq 1, \\ h^{n+k} \frac{e^{-|x|}}{|x|^{(n-m+1)/2}}, & |x| > 1. \end{cases} \quad (11)$$

Лемма доказывается аналогично предыдущей лемме.

От области Ω будем требовать, чтобы

$$\text{mes}\{x: x \in \Omega, d(x, \Gamma) < h\} = O(h) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (12)$$

Здесь d обозначает расстояние.

Наметим доказательство теоремы. Пользуясь свойством $[H_p^\mu(\Omega)]^* = \dot{H}_q^{1/\mu}(\Omega)$, представим норму функционала $l(x)$ с регулярным пограничным слоем в виде

$$\|l(x)\|_{H_p^{\mu*}(\Omega)} = \left\{ \int \left| F^{-1} \left(\frac{1}{\mu(\xi)} \right) * l(x) \right|^q dx \right\}^{1/q}. \quad (13)$$

Как показано в (1), функционал $l(x)$ представим в виде

$$l(x) = l_\infty(x) - l'(x), \quad (14)$$

где $l_\infty(x)$ — функционал ошибки периодической задачи, а $l'(x)$ — функционал ошибки кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем для области $E_n \setminus \Omega$. Используя (14) после некоторых преобразований и пользуясь неравенством Минковского, получим, что

$$\begin{aligned} \|l(x)\|_{H_p^{\mu*}(\Omega)} & \left\{ \int_{\Omega_{3L}} |v(x) * l_\infty(x)|^q dx \right\}^{1/q} + \\ & + \left\{ \int [v(x) * l_\infty(x)] \mathcal{E}_{E_n \setminus \Omega_{3L}}(x) - v(x) * l'(x) \right\}^{1/q}, \end{aligned} \quad (15)$$

где Ω_{3L} есть область Ω с окрестностью $3Lh$.

Первое слагаемое в правой части (15) дает главный член, если иметь в виду, что

$$v(x) * l_\infty(x) = \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(2\pi i \gamma h^{-1} H^{-1} x)}{\mu[\gamma h^{-1} H^{-1}]} \quad (16)$$

и условие (12).

Пусть $B_L^{(i)}$ обозначает множество точек $hH\gamma \in \Omega$ и $d(hH\gamma, \Gamma) > Lh$, $B_L^{(l)}$ — множество точек $hH\gamma$, для которых $d(hH\gamma, \Gamma) \leq Lh$, а $B_L^{(e)}$ — множество точек $hH\gamma \in E_n \setminus \Omega$ и $d(hH\gamma, \Gamma) > Lh$. Тогда второе слагаемое в правой части (15) оценится суммой следующих четырех интегралов:

$$J_1 = \left\{ \int_{E_n \setminus \Omega_{3L}} \left| v(x) * \sum_{\gamma \in B_L^{(i)}} l^{(0)} \left(\frac{x}{h} - H\gamma \right) \right|^q dx \right\}^{1/q}, \quad (17)$$

$$J_2 = \left\{ \int_{E_n \setminus \Omega_{3L}} \left| v(x) * \sum_{\gamma \in B_L^{(l)}} l\gamma \left(\frac{x}{h} - H\gamma \right) \right|^q dx \right\}^{1/q}, \quad (18)$$

$$J_3 = \left\{ \int_{\Omega_{3L}} \left| v(x) * \sum_{\gamma \in B_{5L}^{(l)}} m(\gamma) \left(\frac{x}{h} - H\gamma \right) \right|^q dx \right\}^{1/q}, \quad (19)$$

$$J_4 = \left\{ \int_{\Omega_{3L}} \left| v(x) * \sum_{\gamma \in B_{5L}^{(e)}} l^{(0)} \left(\frac{x}{h} - H\gamma \right) \right|^q dx \right\}^{1/q}. \quad (20)$$

Теперь, используя леммы 1, 2, можно показать, что все эти интегралы являются величиной $O(h^{m+1})$. Это с учетом (15) и (16) и дает доказательство теоремы.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
3 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Л. Соболев, Лекции по теории кубатурных формул, ч. 2, Новосибирск, 1964. ² В. Д. Чарушников, ДАН, 170, № 1, 1032 (1966). ³ Л. Р. Волевиц, Б. П. Панеях, УМН, 20, в. 1, 3 (1965).