

УДК 517.9+532

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. В. АЛЕКСЕЕВ, Н. В. ХУСНУТДИНОВА

# О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 8 VI 1971)

В работе рассматривается одномерное нестационарное течение двух несмешивающихся жидкостей (например, воды и нефти) в пористой среде. Уравнение для водонасыщенности  $s$  в этом случае имеет вид <sup>(1)</sup>

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(s) \frac{\partial s}{\partial x} - Q(t) c(s) \right), \quad (1)$$

где коэффициенты  $a(s)$  и  $c(s)$  определены при  $s_* \leq s \leq s^*$  ( $0 < s_* < s^* < 1$ ), причем  $a(s_*) = a(s^*) = 0$ ,  $a(s) > 0$ ,  $c(s) > 0$ ,  $c_s \geq 0$ , когда  $s_* < s < s^*$ . Таким образом, параболическое уравнение (1) вырождается в уравнение первого порядка при  $s = s_*$  и  $s = s^*$ .

Краевые задачи и задача Коши для параболических уравнений с вырождением при одном значении искомой функции изучались в <sup>(2)</sup>, где для каждой из задач вводится понятие обобщенного решения и доказывается его существование и единственность. В настоящей заметке доказывается существование и единственность обобщенного решения первой краевой задачи для более общего уравнения (1), вырождающегося при двух значениях искомой функции.

Рассмотрим уравнение (1) в прямоугольнике  $R \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$  при краевых условиях

$$s(0, x) = s_0(x), \quad s(t, 0) = s^*, \quad s(t, l) = s_*. \quad (2)$$

Обозначим через  $\Gamma$  часть границы  $R$ , состоящую из боковых сторон ( $x = 0$ ,  $x = l$ ) и нижнего основания ( $t = 0$ ); через  $\Gamma_1$  — часть границы  $R$ , состоящую из боковых сторон и верхнего основания ( $t = T$ ). Введем

в рассмотрение функцию  $\varphi(s) = \int_{s_*}^s a(\tau) d\tau$ .

**Определение.** Функцию  $s(t, x)$ , непрерывную в  $R$ , удовлетворяющую условиям (2) и неравенству  $s_* \leq s(t, x) \leq s^*$ , назовем обобщенным решением задачи (1), (2), если существует обобщенная производная  $\partial \varphi(s) / \partial x$ , ограниченная в  $R$ , и для любой функции  $f(t, x) \in C'(R)$ , обращаемой в нуль на  $\Gamma$ , выполняется равенство

$$\iint_R \left[ s \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \varphi(s)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + Q(t) c(s) \frac{\partial f}{\partial x} \right] dt dx + \int_0^l s_0(x) f(0, x) dx = 0. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются следующие предположения:

- 1)  $s_0(x) \in C[0, l]$ ,  $\varphi(s_0(x)) \in C^1[0, 1]$ ,  $s_0(0) = s^* \geq s_0(x) \geq s_* = s_0(l)$ ;
- 2)  $a(s) \in C[s_*, s^*] \cap C^{1-\alpha}[s_* + \delta, s^* - \delta]$ ,  $0 < \delta < 1$ ,  $\delta > 0$  — сколь угодно малое число;

- 3)  $c(s) \in C^{2+\alpha}[s_*, s^*]$ ,  $c(s) \geq 0$ ,  $c_s \geq 0$  при  $s_* \leq s \leq s^*$ ,  $Q(t) \in C^{(1+\alpha)/2}[0, T]$ ,  $Q(t) \geq 0$  при  $t \in [0, T]$ .

Тогда существует обобщенное решение  $s(t, x)$  задачи (1), (2), причем в тех точках  $R \setminus \Gamma$ , где  $s_* < s < s^*$ , функция  $s(t, x)$  имеет непрерывные

производные, входящие в уравнение (2), и удовлетворяет ему в обычном смысле.

Доказательство. Заменой искомой функции  $\varphi(s) = v$ ,  $s = \Phi(v)$  преобразуем уравнение (2) к виду

$$\partial v / \partial t = A(v) \partial^2 v / \partial x^2 - Q(t) B(v) \partial v / \partial x, \quad (4)$$

где  $A(v) = 1 / \Phi_v(v) \equiv a(s(v))$ ,  $B(v) = c_s(s(v))$ .

Рассмотрим функцию  $v_0(x) = \varphi(s_0(x))$  и построим монотонно возрастающую последовательность гладких функций  $v_{0m}(x)$ , сходящуюся равномерно к  $v_0(x)$  и такую, что  $|dv_{0m}/dx| \leq K$ ,  $0 \leq v_{0m}(x) \leq V - 1/m = V_m$ , где  $V = \varphi(s^*)$ ;  $v_{0m}(0) = V_m$ ,  $v_{0m}(l) = 0$  ( $K$  — некоторая постоянная). Построим далее монотонно убывающие последовательности  $v_{0m,n}(x) \in C^{3+\delta}[0, l]$ , сходящиеся равномерно при каждом  $m$  к  $v_{0m}(x)$  и обладающие свойствами:  $|dv_{0m,n}/dx| \leq K$ ,  $1/n \leq v_{0m,n}(x) \leq V_m$ ,  $v_{0m,n}(0) = V_m$ ,  $v_{0m,n}(l) = 1/n$ . Потребуем также от  $v_{0m,n}(x)$  выполнения условий согласования граничных и начальных данных первого порядка.

В силу условий теоремы при любых  $m$  и  $n$  уравнение (4) имеет единственное решение  $v_{m,n}(t, x) \in C^{3+\delta, (3+\delta)/2}(R)$ , принимающее краевые значения

$$v_{m,n}(0, x) = v_{0m,n}(x), \quad v_{m,n}(t, 0) = V_m, \quad v_{m,n}(t, l) = 1/n, \quad (5)$$

и, согласно принципу максимума,  $1/n \leq v_{m,n}(t, x) \leq V_m$ . Так как на границе  $\Gamma$  по построению  $v_{m,n+1} \leq v_{m,n} \leq v_{m+1,n}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ), то из принципа максимума следует справедливость этих неравенств всюду в  $R$ . Таким образом, функции  $v_{m,n}(t, x)$  образуют монотонно возрастающую по  $m$  и монотонно убывающую по  $n$  последовательность: то же самое справедливо для последовательности  $s_{m,n}(t, x) = \Phi(v_{m,n}(t, x))$ , причем  $s_* < s_{m,n} < s^*$ . В силу этих свойств при каждом  $m$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n}(t, x) = s_m(t, x)$ , причем  $s_* \leq s_m \leq s_{m+1} < s^*$ , и, следовательно, существует  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(t, x) = s(t, x)$ . Покажем, что  $s(t, x)$  является обобщенным решением задачи (1), (2). Очевидно,  $s_* \leq s(t, x) \leq s^*$ . Установим наличие ограниченной в  $R$  обобщенной производной  $\partial \varphi(s) / \partial x$ .

Лемма 1. На границе  $\Gamma$  справедлива оценка

$$|\partial v_{m,n} / \partial x| \leq M_1, \quad (6)$$

где  $M_1$  не зависит от  $m$  и  $n$ .

Доказательство. При  $t = 0$   $|\partial v_{m,n} / \partial x| = |\partial v_{0m,n} / \partial x| \leq K$ . При  $x = 0$ , согласно условиям (5),  $\partial v_{m,n} / \partial x \leq 0$ . Чтобы оценить  $\partial v_{m,n} / \partial x$  снизу, введем вспомогательную функцию  $F_m = V_m - Kx$ . В прямоугольнике  $R$  разность  $z = F_m - v_{m,n}$  удовлетворяет параболическому уравнению с неотрицательной правой частью, причем  $z \leq 0$  на  $\Gamma$ . Применяя принцип максимума, получаем  $z \leq 0$  в  $R$ , откуда  $\partial v_{m,n} / \partial x|_{x=0} \geq -K$ .

Оценим  $\partial v_{m,n} / \partial x$  при  $x = l$ . Согласно (5),  $\partial v_{m,n} / \partial x|_{x=l} \leq 0$ ; для оценки  $\partial v_{m,n} / \partial x$  сверху при  $x = l$  строится последовательность  $u_{m,n}(x)$  стационарных решений уравнения (1), мажорирующая последовательность  $v_{m,n}(t, x)$  на некотором промежутке  $[l - \varepsilon, l]$ , совпадающая с  $v_{m,n}(t, x)$  при  $x = l$  и принимающая значение  $V_m$  при  $x = l - \varepsilon$ . Существование такой последовательности при некотором  $\varepsilon > 0$  легко следуют из анализа неявного представления стационарного решения  $u_{m,n}(x)$ , получающегося простой квадратурой. Последовательность производных  $\partial u_{m,n} / \partial x$  равномерно ограничена сверху постоянной, не зависящей от  $m$  и  $n$ . В силу построения этой последовательности то же справедливо и для последовательности  $\partial v_{m,n} / \partial x$ .

Лемма 2. Если максимум  $\left| \frac{\partial v_{m,n}}{\partial x} \right|$  достигается в точке из области

$R \setminus \Gamma$ , то в точке максимума справедлива оценка

$$|\partial v_{m,n} / \partial x| \leq M_2, \quad (6)$$

где  $M_2$  не зависит от  $m$  и  $n$ .

**Доказательство.** Введем новую функцию  $z(t, x)$  с помощью равенства  $v_{m,n} = f_{m,n}(z)$ , где  $f_{m,n}(\tau)$  при любых  $m$  и  $n$  — строго монотонно возрастающая функция  $\tau$  на промежутке  $[0, 1]$ , причем  $f_{m,n}(0) = 1/n$ ,  $f_{m,n}(1) = V_m$ . Подставляя  $z$  в (4) и дифференцируя полученное уравнение по  $x$ , получим уравнение, которому удовлетворяет функция  $z_* = p$ . Рассматривая это уравнение в точке максимума  $|p|$ , приходим к неравенству

$$0 \leq A(f''/f')'p^4 + A_v f''p^4 - QB_v f'p^3.$$

(Здесь для простоты опущены индексы  $m$  и  $n$  у  $f$  и  $v$ .) Выберем функцию  $f(z)$  так, чтобы

$$A(f''/f')' + A_v f'' = -f'^2/A. \quad (7)$$

Тогда в точке максимума  $0 \leq -\frac{f'^2}{A}p^4 - \frac{Qc_{ss}f''}{A}p^3$ . Откуда, сокращая на множитель  $f'/A > 0$ , приходим к искомой оценке (6), где  $M_2 = \max_t Q(t) \cdot \max_s |c_{ss}|$ .

Функцию  $f(z)$ , обладающую нужными свойствами, легко получить, если уравнение (7) дважды проинтегрировать по  $z$ . Будем иметь

$$\frac{dv}{dz} = C \cdot \cos \left( \int_{1/n}^v \frac{d\lambda}{A(\lambda)} \right),$$

где  $C > 0$  — произвольная постоянная. Поскольку  $\int_{1/n}^v \frac{d\lambda}{A(\lambda)} = s - \Phi\left(\frac{1}{n}\right) < 1$ ,

то  $f'(z) > 0$  при любых  $m$  и  $n$ . Интегрируя это уравнение и выбирая нужным образом константу  $C$ , приходим к желаемому результату.

Из оценок (5) и (6) следует, что  $|\partial \phi(s_{m,n}) / \partial x| \leq M = \max(M_1, M_2)$ , откуда, переходя к пределу сначала при  $n \rightarrow \infty$ , затем при  $m \rightarrow \infty$ , получаем, что функции  $\phi(s, (t, x))$  удовлетворяет условию Липшица по  $x$  с константой  $M$ , не зависящей от  $t$ , и что в  $R$  существует обобщенная производная  $\partial \phi(s) / \partial x$ , по модулю не превосходящая  $M$  <sup>(4)</sup>. Равенство (3) для функции  $s(t, x)$  вытекает из справедливости (3) для функций  $s_{m,n}(t, x)$ . Непрерывность и тот факт, что во всех точках  $R \setminus \Gamma$ , где  $s_* < s < s^*$ , функция  $s(t, x)$  удовлетворяет уравнению (1) в обычном смысле, доказывается аналогично <sup>(2)</sup>.

**Теорема 2.** Обобщенное решение задачи (1), (2) единственно, если

$$\lim_{s \rightarrow s_*} c_s / \sqrt{a(s)} < \infty, \quad \lim_{s \rightarrow s^*} c_s / \sqrt{a(s)} < \infty.$$

**Доказательство** проводится по схеме работы <sup>(3)</sup>, стр. 189—195.

Устремляя  $l$  к бесконечности так же, как это делается в <sup>(2)</sup>, с учетом леммы 2 получаем разрешимость первой краевой задачи в полуполосе  $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty\}$ .

Авторы выражают благодарность В. Н. Монахову за полезные замечания при обсуждении работы.

Новосибирский государственный университет  
Институт теоретической и прикладной механики  
Сибирского отделения Академии наук СССР  
Новосибирск

Поступило  
13 V 1971

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> С. Н. Антонцев, В. Н. Монахов, В сборн. Динамика сплошной среды, в. II, «Наука», 1969, стр. 156. <sup>2</sup> О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу Юй-линь, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, 667 (1958). <sup>3</sup> О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967. <sup>4</sup> С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1962. <sup>5</sup> О. А. Олейник, В сборн. Первая летняя математическая школа, Киев, 1964.