Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 512.522 *МАТЕМАТИКА*

С. Я. ХАВИНСОН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРИБЛИЖЕНИИ С УЧЕТОМ ВЕЛИЧИН КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 20 VII 1970)

Вопрос об учете величин коэффициентов аппроксимирующих многочленов встает во многих задачах аппроксимации. Основы общего подхода к таким вопросам даны в работах Дейвиса и Фань-Цзи ([1]) и автора ([2]). Различные применения этой теории можно найти в работах ([3–7]).

В настоящей работе мы дополняем общие теоремы статьи ([2]) и даем несколько новых применений теории к задачам, связанным с аналитическими функциями.

1°. Пусть $X=\{\omega\}$ — линейное пространство с полунормой $p(\omega)$. Наряду с X рассматривается последовательность n-мерных пространств $E^n=\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\}$ с полунормами $p_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $n=1,2,\ldots$ При этом мы считаем, что для любых n и $m>n$ выполняется условие $p_1(\lambda_1,\ldots$ $\ldots,\lambda_n)=p_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\underbrace{0\ldots0}_{m-n})$. Пусть $\{\varphi_j\}$, $j=1,2,\ldots,$ — произвольная система элементов в X. Для любого элемента $\omega\in X$ положим

$$\widetilde{p}_1(\omega)=\inf\lim_{k\to\infty}p_1(\lambda_1^k,\ldots,\lambda_{n_k}^k),$$

где inf взята по всевозможным системам $(\lambda_1^k,\ldots,\lambda_{n_k}^k)$ таким, что имеет место аппроксимация

$$p\Big(\omega-\sum_1^{n_k}\lambda_j^k\varphi_j\Big)\to0,\quad k\to\infty.$$

(Если для какого-нибудь $\omega\in X$ вообще не существует последовательностей линейных комбинаций элементов системы $\{\varphi_j\}$, сходящихся к ω по полунорме p, то считаем, что $\tilde{p}_1(\omega)=\infty$. Очевидно далее, что $\tilde{p}_1(\lambda_1\varphi_1+\ldots$ $\ldots+\lambda_n\varphi_n)\leqslant p_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.)

Определение. Система $\{\varphi_j\}$, $j=1,2,\ldots,$ называется $(p,o(p_1))$-полной (замкнутой) в X, если для любого $\omega\in X$ имеем $\tilde{p}_1(\omega)=0$. Если же для любого $\omega\in X$ выполняется неравенство $\tilde{p}_1(\omega)<+\infty$, то систему $\{\varphi_j\}$ назовем $(p,O(p_1))$-полной в X. В работе ([2]) полнота $(p,o(p_1))$ была названа (p,p_1)-полнотой и был приведен критерий такой полноты (теорема 2 этой работы); полнота $(p,O(p_1))$ в ([2]) не вводилась.

Теорема 1. *Пусть X полно по полунорме p. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Существует константа $C\geqslant0$ такая, что для произвольного линейного функционала l над X, непрерывного относительно p из неравенств*

$$\Big|\sum_1^n\lambda_jl(\varphi_j)\Big|\leqslant p_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),\tag{1}$$

выполняющихся при всех n и любых λ_j, вытекает, что $\|l\|\leqslant C$. (*Как обычно,* $\|l\|=\sup\limits_{p(\omega)\leqslant1}|l(\omega)|$);

2. *Система* $\{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, $(p, O(p_1))$*-полна в* X. *В случае* $C = 0$ *система* $\{\varphi_j\}$ $(p, o(p_1))$*-полна в* X;

3. *Неравенство* $\tilde{p}_1(\omega) < +\infty$ *выполняется на некотором множестве второй категории в* X.

Наметим доказательство. Если выполнено утверждение 1, то согласно следствию из теоремы 5 работы [2] для $\forall \omega \in X$ будет выполняться соотношение

$$\sup |l(\omega)| = \tilde{p}_1(\omega),$$

где sup взята по всем l, удовлетворяющим (1), и поэтому $\tilde{p}_1(\omega) \leqslant Cp(\omega)$. Следовательно, $1 \to 2$. Очевидно также, что $2 \to 3$. Если имеет место 3, то обычные рассуждения теории Банаха — Штейнгауза приводят к существованию константы $C \geqslant 0$ такой, что $\tilde{p}_1(\omega) \leqslant Cp(\omega)$ $\forall \omega \in X$. Допустим, вопреки утверждению 1, что при любом $K > 0$ возможно отыскать линейный функционал l_0 над X, для которого выполнено (1), но $\|l_0\| > K$. Обозначим $\|l_0\| = T$. Тогда $\exists \omega$, $p(\omega) = 1$, для которого $|l_0(\omega)| > {}^1/_2 T$. Используя соотношение двойственности теоремы 1 работы [8], получим

$$\frac{1}{2} T < |l_0(\omega)| \leqslant \sup |l(\omega)| = \inf_{\{\lambda_j\}_1^n} \left[T p\left(\omega - \sum_1^n \lambda_j \varphi_j\right) + p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\right], \quad (2)$$

где верхняя грань взята по всем линейным функционалам l над X, для которых $\|l\| \leqslant T$ и выполняются неравенства (1). Отсюда для любой последовательности $\sum_1^{n_k} \lambda_j^k \varphi_j$, для которой $p\left(\omega - \sum_1^{n_k} \lambda_j^k \varphi_j\right) \to 0$, вытекает неравенство

$$\varliminf_k p_1(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_{n_k}^k) \geqslant {}^1/_2 T$$

и, следовательно, $\tilde{p}_1(\omega) \geqslant {}^1/_2 T$. Мы получим противоречие с неравенством $\tilde{p}_1(\omega) \leqslant C = Cp(\omega)$, ибо T сколь угодно велико.

В дальнейших приложениях X — всегда пространство Банаха, а $p(\omega)$ — норма в X. Поэтому $(p, o(p_1))$-полноту мы будем обозначать просто, как $o(p_1)$-полноту, а $(p, O(p_1))$-полноту, как $O(p_1)$-полноту.

2°. Пусть C_A — пространство аналитических в круге $|z| < 1$ функций, непрерывных в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ с обычной нормой $p(\omega) = \max_{|z|=1} |\omega(z)|$. Пусть $\{t_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, t_j > 0$ — некоторая числовая последовательность.

Теорема 2. *Для того чтобы нашлась система простых дробей* $\{\varphi_j = 1/(z - \alpha_j)\}$, $j = 1, 2, \ldots$, $|\alpha_j| > 1$, *такая, чтобы для любой* $\omega(z) \in C_A$ *была возможна аппроксимация*

$$\max_{|z|=1} \left|\omega(z) - \sum_1^{n_k} \lambda_j^k \frac{1}{z - \alpha_j}\right| \to 0 \quad (3)$$

при выполнении условия

$$\lambda_j^n = O(t_j), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_1^\infty t_j = \infty. \quad (5)$$

Более того, при выполнении (5) *существует система дробей, для которой* (3) *возможна при условии*

$$\lambda_j^k = o(t_j), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots \quad (6)$$

Доказательство. Если положить $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |\lambda_j / t_j|$, то станет ясным, что речь идет здесь об $O(p_1)$ полноте в C_A.

Лемма. *Пусть выполнено* (5). *Найдется последовательность различных точек* $\{\alpha_j\}$, $|\alpha_j| > 1$, $j = 1, 2, \ldots$, *такая, что из условия*

$$\sum_1^\infty t_j |F(\alpha_j)| < +\infty, \quad F(\infty) = 0 \tag{7}$$

для любой аналитической и ограниченного вида при $|z| > 1$ *функции* $F(z)$ *следует, что* $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Сперва берется последовательность $\{\beta_j\} \to \beta_0$, $|\beta_0| > 1$. При достаточно больших весах δ_j из условия $\sum\limits_1^\infty \delta_j |F(\beta_j)| < \infty$ для любой аналитической в области $|z| > 1$ функции $F(z)$ будет следовать $F(z) \equiv 0$. Затем каждую точку β_j надо заменить системой достаточно близких к ней точек, взятых в достаточно большом количестве, связанном с ростом частных сумм ряда (5). Таким путем придем к нужной последовательности $\{\alpha_j\}$.

Приступая к доказательству достаточности в теореме 2 будем рассматривать систему дробей $\varphi_j = 1 / (\zeta - \alpha_j)$ с полюсами в точках α_j, для которых справедливо утверждение леммы. Пусть $l(\omega) = \int\limits_\Gamma \omega(\zeta)\, d\mu$ — произвольный линейный функционал над C_A (Γ — единичная окружность, μ — комплексная беровская мера на Γ). Если рассмотрим аналитическую функцию

$$F(z) = \int\limits_\Gamma d\mu/(\zeta - z),$$

то неравенства (1) для функционала l будут означать, что $\sum\limits_1^\infty t_j |F(\alpha_j)| < \infty$ и, следовательно, $F(z) \equiv 0$. По теореме бр. Рисс, $d\mu = \psi(\zeta)\, d\zeta$, где $\psi(z)$ входит в класс H_1 в круге $|z| < 1$. Поэтому, $l \equiv 0$ над C_A. Из теоремы 1 следует теперь, что требуемая аппроксимация возможна. Если же $\sum\limits_1^\infty t_j < +\infty$ и $\{\varphi_j = 1 / (\zeta - \alpha_j)\}$ — произвольная система дробей с полюсами α_j, $|\alpha_j| > 1$, то рассуждаем так. Берем произвольное $K > 0$ и пусть m таково, что $\sum\limits_{m+1}^\infty t_j \leqslant 1/K$. Построим функцию $\psi(\zeta) = = \dfrac{K}{\zeta} \prod\limits_1^m \dfrac{\zeta - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j \zeta}$ и рассмотрим функционал $l(\omega) = \int\limits_\Gamma \omega(\zeta)\, \psi(\zeta)\, d\zeta$. Для этого функционала $\sum\limits_1^\infty t_j |l(\varphi_j)| = \sum\limits_1^\infty t_j |\psi(\alpha_j)| \leqslant 1$ и в то же время $\|l\| = K$. Таким образом, теперь из (1) не следует наличия константы C такой, чтобы было $\|l\| \leqslant C$. Доказательство завершено.

Известен ряд результатов (см., например, [9], где упомянуты и предшествующие работы), в которых устанавливается возможность разложения аналитических в замкнутой области функций в ряды рациональных дробей со значительно меньшими коэффициентами, чем даваемые теоремой 2. Это не находится в противоречии с теоремой 2, так как аналитические в замкнутой области функции образуют множество первой категории в пространстве C_A.

Приведем еще некоторые результаты близкого характера. Дополним прежде всего классическую теорему Мюнца [10].

Теорема 3. *Пусть* $\{k_i\}$ — *последовательность точек в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$, *для которой выполняются условия*

$$|k_{i+1}| - |k_i| \geqslant d > 0, \ i = 1, 2, \ldots, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{|k_i|} = \infty,$$

и $\{\nu_i\}$, $\nu_i \geqslant 0$, *такова, что* $\lim \nu_i = +\infty$. *Положим*

$$p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_1^n e^{-\nu_i |k_i|} |\lambda_i|.$$

Последовательность $\{x^{k_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *будет* $o(p_1)$-*полна в* $C[0, 1]$ (*комплексном*). *Если все* $k_i > 0$ *и* $R > 0$ *произвольно велико, то* $\{x^{k_i}\}$ *не может быть* $o(p_1)$-*полной в* $C[0, 1]$ *для* $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_1^n e^{-R|k_i|} |\lambda_i|$.

Следующая теорема относится к проблеме моментов. Она является обобщением одной теоремы Микусинского ([11]) (см. также ([12], [13])).

Теорема 4. *Пусть* Γ — *нигде не плотный компакт, не разбивающий плоскость, и* μ — *комплексная беровская мера на* Γ. *Положим* $C_n = \int_\Gamma t^n d\mu$ *и пусть* $\overline{\lim} \sqrt[n]{|C|} = R$. *Тогда замкнутый носитель меры* μ *сосредоточен в круге* $|z| \leqslant R$.

Доказательство строится на рассуждениях, близких к примененным в ([5]).

Последняя теорема дает новый признак областей класса S В. И. Смирнова (см. ([14])). Эта теорема доказана автором совместно с Г. Ц. Тумаркиным. Пусть G — область со спрямляемой границей Γ. Положим для $z \in G$:

$$\Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi} \inf \int_\Gamma \left| \frac{1}{t-z} - \sum_1^n \frac{\lambda_k}{t - z_k} \right| |dt|,$$

$$\Omega_2(z) = \inf \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left| \frac{1}{t-z} - \sum_1^n \frac{\lambda_k}{t - z_k} \right| |dt| + \sum_1^n |\lambda_k| \right\},$$

где inf берется по всевозможным наборам точек $z_1, \ldots, z_n$ $\forall n$ вне $\overline{G}$ и всевозможным наборам коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Очевидно, что $\Omega_1(z) \leqslant \Omega_2(z)$.

Теорема 5. *Если* $\sup_{z \in G} \Omega_1(z) < +\infty$, *то* $G \in S$. *Если* $G \in S$, *то* $\Omega_2(z) \leqslant 2$ $\forall z \in G$.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступило 1 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Davis, Ky Fan, Duce Math. J., 24, № 2, 182 (1957). [2] С. Я. Хавинсон, ДАН, 137, № 4, 793 (1961). [3] С. Я. Хавинсон, ДАН, 131, № 1, 44 (1960). [4] С. Я. Хавинсон, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 60, 304 (1961). [5] С. Я. Хавинсон, Математич. заметки, 6, № 5, 619 (1969). [6] Е. Ш. Чацкая, Изв. АН АрмССР, 17, № 4, 9 (1964). [7] Е. Ш. Чацкая, Докл. АН АрмССР, 41, № 3, 129 (1965). [8] С. Я. Хавинсон, ДАН, 130, № 5, 997 (1960). [9] Т. А. Леонтьева, Математ. заметки, 4, № 2, 191 (1968). [10] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947. [11] Mikusinski, Coll. Math., 2, 138 (1951). [12] A. Pelczynski, Chinese Math., 9, N 3, 329 (1967). [13] A. Birkhole, Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 16, N 8, 651 (1968). [14] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.