Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 5

УДК 513.88+517.948.35 *МАТЕМАТИКА*

Т. Я. АЗИЗОВ

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И КРИТЕРИИ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ J-ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНТРЯГИНА $\Pi_\varkappa$

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 6 VII 1970)

1. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с помощью ортогонального разложения $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_i = P_i\mathfrak{H}$, $P_i^2 = P_i^* = P_i$ $(i = 1, 2)$, $\dim \mathfrak{H}_1 = \varkappa < \infty$, $J = P_1 - P_2$, наведена структура пространства $\Pi_\varkappa$ [1, 2] и $[x, y]$ $(x, y \in \mathfrak{H})$ — индефинитное скалярное произведение в нем. Линейный оператор A с плотной областью определения $\mathfrak{D}_A$ назовем J-диссипативным, если $\operatorname{Im}[Ax, x] \geqslant 0$ $(x \in \mathfrak{D}_A)$. Оператор, J-сопряженный [1] к оператору A, будем обозначать через A^c. Если $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{A^c}$, то оператор $A = (A + A^c)/2 + i(A - A^c)/(2i) \equiv A_{\mathfrak{R}} + iA_{\mathfrak{I}}$ и его J-диссипативность эквивалентна тому, что $[A_{\mathfrak{I}} x, x] \geqslant 0$ $(x \in \mathfrak{D}_A)$. J-диссипативный оператор A называется максимальным, если он не допускает J-диссипативных расширений $\tilde{A}$ $(\tilde{A} \neq A)$. Скажем, что оператор A принадлежит классу D, если линеал $\mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_{A^c}$ содержит $\varkappa$-мерное положительное [1] подпространство. J-диссипативный оператор A всегда допускает расширение до максимального.

Предложение 1. *Для того чтобы оператор $A (\in D)$ был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы он имел в верхней полуплоскости хотя бы одну регулярную точку.*

С помощью предложения 1 и теоремы 3.1 из [1] доказывается

Теорема 1. *Если A $(\in D)$ — максимальный J-диссипативный оператор, то у него существует $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathfrak{Z}_\varkappa$. Подпространство $\mathfrak{Z}_\varkappa$ можно выбрать так, что спектр $\sigma(A | \mathfrak{Z}_\varkappa)$ сужения $A | \mathfrak{Z}_\varkappa$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$.*

2. При усилении условий на область определения оператора справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Если A — замкнутый J-диссипативный оператор, $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{A^c}$, а $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$ — собственные числа оператора A $(k \leqslant \infty)$, причем $\operatorname{Im} \lambda_i > 0$ (< 0), $i = 1, 2, \ldots$, то л. о. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathfrak{N}(A - \lambda_i I)$ является положительным (отрицательным) линеалом при $k = \infty$ и подпространством (т. е. замкнутым линеалом) при $k < \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}(A - \lambda_i I) \cap \mathfrak{N}(A_{\mathfrak{I}}) = \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots$ (Через $\mathfrak{N}(T)$ обозначается ядро оператора T.)*

При отказе от замкнутости оператора A имеет место

Теорема 3. *Если A — J-диссипативный оператор, $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{A^c}$, а $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$ — собственные числа оператора A $(k \leqslant \infty)$ и $\operatorname{Im} \lambda_i > 0$ (< 0), $i = 1, 2 \ldots$, то з. л. о. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathfrak{N}(\bar{A} - \lambda_i I)$ будет неотрицательным (неположительным) подпространством в $\Pi_\varkappa$ ($\bar{A}$ — замыкание A).*

Следствие. *J-диссипативный оператор A в пространстве $\Pi_\varkappa$ с $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{A^c}$ имеет внутри верхней полуплоскости не более $\varkappa$ собственных чисел.*

Теорема 4. *Если A — максимальный J-диссипативный оператор, $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{A^c}$ и подпространство $\mathfrak{R}(A_{\mathfrak{J}})$ положительно (отрицательно или $\{0\}$), то оператор A имеет $\varkappa$-мерное положительное инвариантное подпространство $\mathfrak{L}$. Это подпространство определяется единственным образом:*

$$\mathfrak{L} = л.о \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{L}_{\lambda_i}(A),$$

где $\mathfrak{L}_{\lambda_i}(A)$ — все корневые подпространства оператора A, отвечающие собственным значениям λ_i с $\operatorname{Im} \lambda_i \geqslant 0$ (> 0), $i = 1, 2, \ldots, k$ $(\leqslant \varkappa)$.

3. Наряду с вопросами существования у J-диссипативных операторов $\varkappa$-мерных неотрицательных подпространств для приложений интересны вопросы о полноте системы корневых векторов вполне непрерывных J-диссипативных операторов.

Лемма. *Если A — J-диссипативный вполне непрерывный оператор и замкнутая линейная оболочка $\mathfrak{E}(A)$ всех корневых векторов оператора A невырождена* (1), *то либо ее J-ортогональное дополнение $\mathfrak{E}(A)^{[\perp]} = \{0\}$, либо $(A)^{[\perp]}$ — отрицательное подпространство и $(-A)$ индуцирует в нем вольтерров диссипативный оператор* (2).

Настоящая лемма позволяет перенести на J-диссипативные операторы в $\Pi_\varkappa$ ряд утверждений о полноте системы корневых векторов диссипативных операторов в (дефинитном) гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Теорема 5. (ср. (3), теорема V.2.3). *Если A — ядерный J-диссипативный оператор в $\Pi_\varkappa$, то для того чтобы $\overline{\mathfrak{E}(A)} = \Pi_\varkappa$, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $\overline{\mathfrak{E}(A)}$ было невырождено.*

Аналогично переносятся из (3) теоремы V.4.2, V.6.1, V.6.2, V.6.3.

Теорема 6. (ср. (3), теорема V.4.1). *Если A — вполне непрерывный J-диссипативный оператор в $\Pi_\varkappa$ с ядерной мнимой компонентой $A_{\mathfrak{J}}$ и выполняется хотя бы одно из четырех условий:*

$$1)\ \lim_{\rho\to\infty} \frac{n_+(\rho; A_{\mathfrak{R}} + A_{\mathfrak{R}}^*)}{\rho} = 0; \qquad 2)\ \lim_{\rho\to\infty} \frac{n_-(\rho; A_{\mathfrak{R}} + A_{\mathfrak{R}}^*)}{\rho} = 0;$$

$$3)\ \lim_{\rho\to\infty} \frac{n_+(\rho; A + A^*)}{\rho} = 0; \qquad 4)\ \lim_{\rho\to\infty} \frac{n_-(\rho; A + A^*)}{\rho} = 0,$$

то $\overline{\mathfrak{E}(A)} = \Pi_\varkappa$ в том и только в том случае, когда $\overline{\mathfrak{E}(A)}$ будет невырожденным подпространством. (Символы $n_\pm(\rho; T)$ обозначают количество характеристических чисел оператора T в интервалах $[0, \rho]$ и $[-\rho, 0]$ соответственно.)

Аналогично переносятся из (3) теоремы V.6.4 и V.6.5.

4. В этом пункте мы приведем критерий невырожденности подпространства $\overline{\mathfrak{E}(A)}$. Прежде всего заметим, что в условиях теоремы 4 подпространство $\overline{\mathfrak{E}(A)}$ невырождено.

Через θ_A обозначим угол с вершиной в начале координат, который заполняется замыканием множества значений формы $[Ax, x]$ $(x \in \mathfrak{D}_A)$ (4).

Теорема 7. *Пусть A — максимальный J-диссипативный оператор, $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{A^c}$, $\theta_A = \pi/p$, $p > 1$, и правый (левый) граничный луч Γ_1 (Γ_2) угла θ_A образует с положительной (отрицательной) полуосью угол $\varphi_1 \geqslant 0$ $(\varphi_2 \geqslant 0)$, то внутри углов $(-\varphi_2, \varphi_1)$ и $(-\pi + \varphi_1, \pi - \varphi_2)$ оператор A не имеет точек спектра. При дополнительном условии $\overline{\mathfrak{L}_0(A)} \subset \mathfrak{D}_A$ из невырожденности $\mathfrak{L}_0(A)$ следует невырожденность $\overline{\mathfrak{E}(A)}$. ($\mathfrak{L}_0(A)$ — корневой линеал (3) оператора A, отвечающий точке 0).*

5. Частным случаем вполне непрерывных J-диссипативных операторов являются вполне непрерывные J-самосопряженные операторы (1).

С помощью одной теоремы И. С. Иохвидова (5) доказывается

Теорема 8. *Для того чтобы J-самосопряженный вполне непрерывный* *оператор A имел полную в $\Pi_\varkappa$ систему корневых векторов, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{L}_0(A)$ было невырождено.*

Эта теорема позволяет обобщить предложение 1° из (3), гл. V, § 8.

Теорема 9. *Пусть $S = S^*$ — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$, множество $\sigma(S) \cap (-\infty, -1)$ состоит не более чем из $\varkappa$ $(0 \leqslant \varkappa < \infty)$ с учетом кратности собственных чисел оператора S и множество значений $\mathfrak{R}(I+S)$ оператора $(I+S)$ замкнуто, а H — такой, что PHP — вполне непрерывный самосопряженный оператор (P — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{R}(I+S)$).*

Тогда, для того чтобы оператор $A = H(I+S)$ имел полную систему корневых векторов, необходимо и достаточно, чтобы $(I+PSP)^{-1}\{\mathfrak{L}_0(PAP)^\perp\} \cap \mathfrak{L}_0(PAP) = \{0\}$.

Настоящая работа выполнена под руководством проф. И. С. Иохфидова. Пользуюсь случаем выразить ему искренною благодарность.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
6 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, Тр. Московск. матем. общ., 5 (1956). [2] Ю. П. Гинзбург, И. С. Иохвидов, УМН, 17, 4 (1962). [3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. [4] И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963. [5] И. С. Иохвидов, ДАН, 71, 2 (1950).