

УДК 519.50+519.54

МАТЕМАТИКА

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СОПРЯЖЕННОСТЬ ЛОКАЛЬНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНОГО КЛАССА ГЛАДКОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 VI 1971)

Задача сопряженности локальных диффеоморфизмов конечного класса гладкости рассматривалась в работах Ф. Хартмана ⁽¹⁾, Ш. Стериберга ⁽²⁾, Р. Венти ⁽³⁾. В настоящей заметке обобщаются и усиливаются результаты этих авторов. В частности, нам удалось показать (см. следствие 1.3), что каждый диффеоморфизм с условием Липшица на производную, линейное приближение которого лежит вне некоторого подмногообразия, приводится к линейному виду непрерывно дифференцируемой заменой координат. Мы исследуем также задачу о локальной разрешимости некоторых функциональных уравнений. В аналитической ситуации эта задача рассматривалась в ⁽⁴⁾.

Пусть $F, G: R^n \rightarrow R^n$ — локальные диффеоморфизмы, действующие в окрестности их общей неподвижной точки $x = 0$. Диффеоморфизмы F и G называются сопряженными в классе C^k , если существует такой локальный диффеоморфизм Φ класса C^k ($\Phi(0) = 0$), что $\Phi(Fx) = G(\Phi(x))$ в некоторой окрестности точки $x = 0$. Диффеоморфизмы F и G класса C^k называются формально сопряженными, если система уравнений

$$\Phi(0) = 0, \quad (\Phi(Fx))^{(j)}|_{x=0} = (G(\Phi(x)))^{(j)}|_{x=0} \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

имеет решение с невырожденной матрицей $\Phi'(0)$. Иными словами, формальная сопряженность означает существование такого локального C^∞ -диффеоморфизма Φ_0 ($\Phi_0(0) = 0$), что все производные до k -го порядка отображения $\Phi_0(Fx) - G(\Phi_0x)$ равны нулю при $x = 0$.

Пусть Λ — невырожденная матрица, $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_q$ — модули ее собственных чисел и L_i — инвариантное подпространство, отвечающее части спектра, лежащей на окружности $|z| = \rho_i$. Положим $Q = \{1, 2, \dots, q\}$ и

$$L_P = \sum_{i \in P} L_i, \quad \rho_P = \max_{i \in P} \rho_i \quad (P \subset Q).$$

Далее, для $P, P' \subset Q$ положим

$$\bar{h}_{P, P'}(\Lambda; k; \beta, \gamma) = \begin{cases} \rho_P^{k+\beta} & (\text{если } P' \not\subset P \text{ или } P' = P), \\ \max(\rho_{P/P'}^{\beta}, \max_{k \geq l \geq 1} \rho_P^l \rho_{P' \setminus P}^{k-l}) & (\text{если } P' \subset P \text{ и } P' \neq P). \end{cases}$$

Пусть, кроме того,

$$h_{P, P'}(\Lambda; k, \alpha) = \min_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ 0 \leq \gamma \leq \alpha}} \bar{h}_{P, P'}(\Lambda; k; \beta, \gamma).$$

Далее, пусть Γ — семейство подмножеств из Q , содержащее Q и замкнутое относительно пересечения. Положим $\omega_P^+(\Gamma, \Lambda; k, \alpha) = \min_{P' \in \Gamma} h_{P, P'}(\Lambda; k, \alpha)$

и $\omega_P^-(\Gamma, \Lambda; k, \alpha) = (\omega_P^+(\Gamma, \Lambda^{-1}; k, \alpha))^{-1}$. Обозначим через $S(\Gamma, \Lambda; k, \alpha)$ объединение замкнутых отрезков

$$\bigcup_{P \in \Gamma} [\omega_P^-(\Gamma, \Lambda; k, \alpha); \omega_P^+(\Gamma, \Lambda; k, \alpha)],$$

причем отрезок считается пустым, если $\omega_P^+ < \omega_P^-$.

Пример 1. Пусть $\Gamma = \{Q\}$. Тогда множество $S(\Gamma, \Lambda; k, 0)$ состоит из отрезка $*[r^{-k}(\Lambda^{-1}); r^k(\Lambda)]$.

Пример 2. Пусть Γ — семейство всех подмножеств из Q . Непосредственный подсчет показывает, что

$$S(\Gamma, \Lambda; k, \alpha) = \bigcup_{i < j} [\rho_i^k(\rho_j^+)^{\alpha}; \rho_j^k(\rho_i^-)^{\alpha}],$$

где $\rho^+ = \max(\rho, 1)$, $\rho^- = \min(\rho, 1)$.

Пример 3. Пусть, как и в примере 2, Γ — семейство всех подмножеств из Q . Множество $S(\Gamma, \Lambda; 1, 1)$ состоит из всевозможных произведений вида $\rho_i \rho_j$, где индексы i и j таковы, что $\rho_i \leq 1 \leq \rho_j$. В частности, если спектр матрицы Λ не разделяется единичной окружностью (т. е. лежит либо целиком внутри единичного круга, либо целиком не его), то множество $S(\Gamma, \Lambda; 1, 1)$ пусто.

Обозначим через $C^{k, \alpha}$ подкласс тех отображений из C^k , для которых k -я производная принадлежит $\text{Lip } \alpha$. В частности $C^{k, 0} = C^k$. Если F — локальный диффеоморфизм, то всюду в дальнейшем через Λ обозначается матрица $F'(0)$.

Теорема 1. Пусть F — локальный диффеоморфизм класса $C^{k, \alpha}$ и Γ — такое семейство подмножеств из Q , что все подпространства L_p ($p \subset \Gamma$) инвариантны относительно F . Если множество $S(\Gamma, \Lambda; k, \alpha)$ не содержит модулей собственных чисел матрицы Λ , то каждый локальный диффеоморфизм класса $C^{k, 1}$, формально сопряженный с F , сопряжен с F в классе C^k .

Полагая $\Gamma = \{Q\}$ и $\alpha = 0$, получим

Следствие 1.1. Пусть F — локальный диффеоморфизм класса C^k . Если отрезок $[r^{-k}(\Lambda^{-1}); r^k(\Lambda)]$ не содержит модулей собственных чисел матрицы Λ , то каждый локальный диффеоморфизм класса $C^{k, 1}$, формально сопряженный с F , сопряжен с F в классе C^k .

Здесь содержится теорема Ш. Стернберга ⁽²⁾ о приведении к линейному виду.

Следствие 1.2. Пусть F — локальный диффеоморфизм класса $C^{k, 1}$ и выполнено условие (!): объединение $\bigcup_{i \geq j} [\rho_i^k \rho_j^+; \rho_j^k \rho_i^-]$ не содержит модулей собственных чисел матрицы Λ .

Тогда из формальной сопряженности F с линейным следует сопряженность в классе C^k .

При $k > 1$ из условия (!) вытекает, что спектр матрицы Λ лежит по одну сторону единичной окружности. В этом случае при условии, более жестком, чем (!), Р. Венти ⁽³⁾ доказал, что диффеоморфизм вида $F(x) = \Lambda x + o(\|x\|^k)$ класса $C^{k, 1}$, сопряжен с Λ в классе C^k . При $k = 1$ следствие 1.2 дает

Следствие 1.3. Пусть F — локальный диффеоморфизм класса $C^{1, 1}$. Если выполнено условие

$$\rho_v \neq \rho_i \rho_j, \quad v = 1, 2, \dots, q, \quad \rho_i \leq 1 \leq \rho_j,$$

то F сопряжен с линейным в классе C^1 .

Пример Ф. Хартмана ⁽⁵⁾ (см. также ⁽⁶⁾) показывает существенность условий следствия 1.3. Если спектр матрицы Λ не разделяется единичной окружностью, то эти условия выполняются автоматически и мы приходим к известной теореме Ф. Хартмана ⁽⁴⁾. В случае плоскости условие следст-

* Через $r(\Lambda)$ мы обозначаем спектральный радиус матрицы Λ .

вия 1.3 сводится к отсутствию у матрицы Λ точек спектра на единичной окружности, т. е. к гиперболичности диффеоморфизма F . Таким образом, справедливо

Следствие 1.4. В плоскости каждый локальный гиперболический диффеоморфизм класса $C^{1,1}$ сопряжен с линейным в классе C^1 .

За пределами теоремы 1 можно рассматривать задачу о сопряженности диффеоморфизмов с понижением класса гладкости. Обозначим через $l(F, k)$ наибольшее из таких чисел l , что каждый локальный диффеоморфизм класса $C^{k,1}$, формально сопряженный с F , сопряжен с F в классе C^l . В терминах спектра матрицы $\Lambda = F'(0)$ можно сформулировать условия, при которых $l(F, k) \geq p$, где p — заданное число. В частности, если $F(x) = \Lambda x$ — линейный гиперболический диффеоморфизм, то $l(F, k) \geq \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor$ при $k \geq n$. Этот факт был установлен нами в (7).

Изложим аналогичные результаты, полученные для функциональных уравнений. Пусть $g: R^n \times R^m \rightarrow R^m$ — отображение класса C^k ($k \geq 1$), удовлетворяющее условию

$$\sup_{(x, y', y'') \in U} \frac{\|g^{(k)}(x, y') - g^{(k)}(x, y'')\|}{\|y' - y''\|} < \infty \quad (x \in R^n, y', y'' \in R^m)$$

для любого компакта $U \subset R^n \times R^m \times R^m$. Пусть, далее, F — локальный диффеоморфизм класса $C^{k,\alpha}$ с неподвижной точки $x = 0$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi(Fx) = g(x, \varphi(x)) \quad (1)$$

относительно отображения φ . Назовем C^∞ -отображение φ_0 формальным решением уравнения (1), если все производные до k -го порядка отображения $\varphi_0(Fx) - g(x, \varphi_0(x))$ равны нулю при $x = 0$. Пусть по-прежнему, $\Lambda = F'(0)$.

Теорема 2. Пусть Γ — такое семейство подмножеств из Q , что все подпространства L_P ($P \in \Gamma$) инвариантны относительно F . Пусть, кроме того, уравнение (1) имеет такое формальное решение φ_0 , что матрица $A = g_y(0, \varphi_0(0))$ невырождена и множество $S(\Gamma, \Lambda; k, \alpha)$ не содержит модулей собственных чисел матрицы A .

Тогда уравнение (1) имеет в окрестности точки $x = 0$ решение класса C^k .

Следствие 2.1. Пусть в уравнении (1) $\alpha = 0$. Пусть, кроме того, существует такое формальное решение φ_0 , что матрица $A = g_y(0, \varphi_0(0))$ невырождена, а отрезок $[r^{-k}(\Lambda^{-1}); r^k(\Lambda)]$ не содержит модулей собственных чисел матрицы A .

Тогда уравнение (1) имеет в окрестности точки $x = 0$ решение класса C^k .

Следствие 2.2. Пусть в уравнении (1) $F(x) = \Lambda x$ — линейный невырожденный оператор. Пусть, кроме того, существует такое формальное решение φ_0 , что матрица $A = g_y(0, \varphi_0(0))$ невырождена и объединение $\bigcup_{i < j} [\rho_i^k \rho_j^{-1}; \rho_j^k \rho_i^{-1}]$ не содержит модулей собственных чисел матрицы A .

Тогда уравнение (1) имеет в окрестности точки $x = 0$ решение класса C^k .

Следствие 2.3. Пусть в уравнении (1) $k = \alpha = 1$, $F(x) = \Lambda x$ — линейный невырожденный оператор. Пусть, кроме того, существует такое формальное решение φ_0 , что матрица $g_y(0, \varphi_0(0))$ невырождена и модули ее собственных чисел отличны от произведений вида $\rho_i \rho_j$ ($\rho_i \leq 1 \leq \rho_j$).

Тогда уравнение (1) имеет в окрестности точки $x = 0$ решение класса C^k .

Следствие 2.4. Пусть в уравнении (1) $k = \alpha = 1$ и $F(x) = \Lambda x$ — линейный невырожденный оператор, спектр которого не разделяется единичной окружностью. Если уравнение (1) имеет такое формальное решение φ_0 , что матрица $g_v(0, \varphi_0(0))$ невырождена, то в окрестности точки $x = 0$ существует решение этого уравнения класса C^h .

Пусть уравнение (1) имеет такое формальное решение φ_0 , что матрица $A = g_v(0, \varphi_0(0))$ невырождена. В терминах спектра матриц A и $\Lambda = F'(0)$ можно сформулировать условия, при которых уравнение (1) имеет решение заданного класса C^l . Например, справедлива

Теорема 3. Пусть в уравнении (1) $F(x) = \Lambda x$ — линейный гиперболический диффеоморфизм. Если существует такое формальное решение φ_0 , что матрица $g_v(0, \varphi_0(0))$ невырождена, то уравнение (1) имеет локальное решение класса $C^{\left[\frac{k}{n}\right]}$.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук СССР
Харьков

Поступило
3 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. Hartman, Bull. Soc. Math. Mexicana, 5 (1960). ² S. Sternberg, Duke Math., 24, № 1, 97 (1957). ³ R. Venti, J. Differ. Equation, № 5 (1966). ⁴ W. Smajdor, Aequat. Math., 1, № 1—2 (1968). ⁵ P. Hartman, Ordinary Differential Equation, N. Y., 1964. ⁶ Б. Былов, Р. Виноград, Р. Гробман, «Наука», 1966. ⁷ Г. Белицкий, ДАН, 191, № 3 (1970).