Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 5

УДК 519.95 + 517.933

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. В. ВЕЛИЧЕНКО

О СТРУКТУРЕ, УПРАВЛЯЕМОСТИ И СИНТЕЗЕ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 2 IV 1971)

Разработка методов синтеза инвариантных систем занимает важное место в проблеме инвариантности [1]. В настоящей работе для решения задачи синтеза инвариантных систем используется метод определяющих уравнений, предложенный в [2]. Изучаются структура и свойства управляемости инвариантных систем.

1°. **Условия инвариантности.** Пусть задана подверженная воздействию вектора внешних возмущений $u(t)$ n-мерная система уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \tag{1}$$

и функция

$$I = \Phi(x, t). \tag{2}$$

Будем называть систему (1) в заданной области $A \subset X \times t$ Φ-инвариантной по u (или сильно инвариантной [3]), если на ее траекториях значения $\Phi[x(t), t]$ функции (2) от возмущения $u(t)$ не зависят.

Предполагается, что в A выполнены следующие условия: $\Phi(x, t)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема по x, t; существует возмущение $u(t) = \tilde{u}(t)$, при котором $f[x, \tilde{u}(t), t]$ n раз непрерывно дифференцируема по x, t; $f[x(t), u(t), t]$ кусочно-непрерывна вдоль любой траектории $x(t)$, t, соответствующей допустимому (кусочно-непрерывному) возмущению $u(t)$; $\nabla_x \Phi(x, t) \neq 0$.

Построим последовательность функций

$$\tilde{\Phi}_0 = \Phi, \quad \tilde{\Phi}_{k+1} = (\nabla_x \tilde{\Phi}_k, f(x, \tilde{u}, t)) + \partial \tilde{\Phi}_k / \partial t \quad (k = 0, \ldots, n-1) \tag{3}$$

и определим для нее матрицу

$$\| \partial \tilde{\Phi} / \partial x \| = \| \partial \tilde{\Phi}_k (x, t) / \partial x_i \|_{i=1,\ldots,n}^{k=0,\ldots,n-1}. \tag{4}$$

Ранг матрицы (4) предположим в A постоянным и назовем **рангом инвариантности системы** (1) относительно функции (2).

Теорема 1. *Пусть ранг матрицы* (4) *равен* s.

Тогда для того чтобы система (1) *была в* A Φ*-инвариантной по* u, *необходимо, чтобы* s *функций*

$$\tilde{\Phi}_{k+1}(x, u, t) = (\nabla_x \tilde{\Phi}_k(x, t), f(x, u, t)) + \partial \tilde{\Phi}_k(x, t) / \partial t \quad (k = 0, \ldots, s-1)$$

при $\{x, t\} \in A$ *не зависели от* u.

В любой компактной области $B \subset A$ *эти условия достаточны.*

Необходимость условий теоремы 1 доказана Л. И. Розоноэром [3] и может быть получена из принципа независимости [2]. Доказательство достаточности, следуя [3], будем проводить с помощью не содержащего $u(t)$ уравнения

$$d^s I / dt^s = \Psi(I, dI / dt, \ldots, d^{s-1} I / dt^{s-1}), \tag{5}$$

которому подчиняется функция $I(t) = \Phi[x(t), t]$ на траекториях системы (1) в окрестности $\alpha(x, t)$ каждой точки $\{x, t\} \in A$ и из существования которого следует достаточность условий теоремы 1 в каждой $\alpha(x, t)$ [3].

Если Ψ при каждом фиксированном t есть однозначная функция своих аргументов $d^kI/dt^k = \Phi_k(x, t)$ для значений Φ_k, соответствующих $\{x, t\} \in B$, достаточность в B следует из теоремы о тождественности решений уравнения (5) с одинаковыми начальными условиями на общем интервале их определения ([4]).

Пусть зависимость Ψ неоднозначна. Будем сравнивать значения $\Phi[x(t), t]$ для начинающихся в одной и той же точке $\{x_0, t_0\} \in B$ и соответствующих произвольным допустимым $\tilde{u}(t)$ и $\hat{u}(t)$ траекторий $\tilde{x}(x_0, t_0; t), t$ и $\hat{x}(x_0, t_0; t), t$. Разбив траекторию $\hat{x}(x_0, t_0; t), t$ точками $\{\hat{x}_i, t_i\} = \{x(x_0, t_0; t_i), t_i\}$, выпустим из каждой из них траекторию $\tilde{x}_i(t), t = \tilde{x}(\hat{x}_i, t_i; t), t$, соответствующую $\tilde{u}(t)$. Из компактности B следует, что при достаточной близости $\{\hat{x}_i, t_i\}$ они попарно, вместе с выходящими из них траекториями $\tilde{x}_i(t), t$, принадлежат областям, где Ψ однозначна. Тогда значения Φ на каждой паре этих траекторий совпадают. Повторяя сравнение значений Φ для каждой пары траекторий $\tilde{x}_i(t)$, t, получаем требуемое равенство

$$\Phi[\tilde{x}(x_0, t_0; t), t] = \Phi[\hat{x}(x_0, t_0; t), t].$$

Условия теоремы 1 являются одновременно условиями $\tilde{\Phi}_k$-инвариантности системы (1) по u относительно любой из функций (3).

2°. Связь между условиями сильной и слабой инвариантности. Из теоремы 1 работы ([2]) следует, что если система (1) слабо инвариантна ([3, 2]), то для нее существует опорная функция $\tilde{V}(x, t)$, удовлетворяющая условию $\frac{d}{dt}\tilde{V}(x, t) = 0$. Отсюда, в соответствии с определением п. 1°, следует, что слабо инвариантная система является сильно инвариантной с рангом инвариантности $s = 1$ относительно $\tilde{V}(x, t)$.

3°. Порождающая система. Зафиксируем функции (3) и изучим класс $C(\tilde{\Phi})$ всех систем, $\tilde{\Phi}_k$-инвариантных относительно совокупности этих функций. Построим вспомогательную систему

$$\dot{x}(t) = \omega \tag{6}$$

и компоненты вектора ω подчиним системе уравнений

$$(\nabla_x\tilde{\Phi}_k(x, t), \omega) + \partial\tilde{\Phi}_k(x, t)/\partial t = \tilde{\Phi}_{k+1}(x, t) \qquad (k = 0, \ldots, s-1). \tag{7}$$

Отличный от нуля минор s-го порядка матрицы (4) содержит элементы первых s ее строк. Поэтому ранг матрицы системы (7) равен s, и эта система определяет s компонент вектора ω через его остальные $n - s$ компонент, которые мы объединим в вектор w. Подставив это решение системы (7) в (6), приходим к системе

$$\dot{x}(t) = \omega = f_n(x, w, t) = \|K(x, t)\|w + \lambda(x, t) \tag{8}$$

с $(n-s)$-мерным возмущающим вектором w. Она удовлетворяет условиям теоремы 1, следовательно, принадлежит классу $C(\tilde{\Phi})$. Назовем эту систему порождающей для класса $C(\tilde{\Phi})$. Отметим, что размерность возмущающего вектора порождающей системы для класса $C(\tilde{V})$ слабо инвариантных систем равна $n - 1$.

Условия теоремы 1 означают, что правые части любой системы класса $C(\tilde{\Phi})$ удовлетворяют системе (7). Отсюда вытекает

Лемма 1. *Класс* $C(\tilde{\Phi})$ *порождается системой* (8): *любая система класса может быть получена из системы* (8) *путем наложения на ее возмущающий вектор* w $n - s$ *ограничений вида*

$$w = \varphi(x, u, t). \tag{9}$$

4°. Структура инвариантных систем. Лемма 1 позволяет сделать вывод о широте класса инвариантных систем.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (1) *была инвариантной, необходимо, чтобы она имела структуру* (8), (9). *Иными словами, инвариантными (как сильно, так и слабо) могут быть только системы, правые части которых линейны по своим зависящим от возмущения компонентам. Число таких независимых компонент не превосходит* $n-1$.

5°. Свойства управляемости инвариантных систем. Будем говорить, что система (1) полностью управляема на многообразии $V \subset X \times t$, если для любых точек $\{x_1, t_1\}$ и $\{x_2, t_2\}$, принадлежащих связной части V, при $t_2 > t_1$ существует соединяющая эти точки траектория системы (1). *Пусть* $\tilde{x}(\xi, \tau; t), t$ — траектория системы (1) с началом в $\{\xi, \tau\}$, соответствующая $u(t) = \tilde{u}(t)$. Для каждой точки $\{\xi, \tau\} \in A$ построим $(n+1-s)$-мерное многообразие $\tilde{V}_{\{\xi, \tau\}}$, определив его соотношениями

$$\tilde{\Phi}_k(x, t) - \tilde{\Phi}_k[\tilde{x}(\xi, \tau; t), t] = 0 \quad (k = 0, \ldots, s-1).$$

Теорема 3. а) *Порождающая система* (8) *полностью управляема на каждом многообразии* $\tilde{V}_{\{\xi, \tau\}}$.

б) *Каждое многообразие* $\tilde{V}_{\{\xi, \tau\}}$ *содержит компактные части областей достижимости всех систем класса* $C(\tilde{\Phi})$ *для точек* $\{x, t\} \in \tilde{V}_{\{\xi, \tau\}}$.

Доказательство теоремы 3 проводится путем конструктивного построения таких управляющих вектор-функций $w(t)$ для системы (8), при которых любая непрерывная кусочно-гладкая кривая, принадлежащая $\tilde{V}_{\{\xi, \tau\}}$, в том числе и каждая траектория любой системы класса $C(\tilde{\Phi})$, является траекторией системы (8).

6°. Синтез инвариантных систем. Поставим следующую задачу синтеза. Задана система

$$\dot{x}(t) = f(x, u, v, t); \tag{10}$$

требуется найти корректирующую вектор-функцию

$$v = v(x, u, t), \tag{11}$$

при которой система (10) будет Ф-инвариантной по u.

Будем считать невозмущенным движение системы (10), соответствующее $u = \tilde{u} = 0$, $v = \tilde{v} = 0$ (в общем случае можно положить $u = \tilde{u}(x, t)$, $v = \tilde{v}(x, t)$). Построим последовательность функций

$$\tilde{\Phi}_0 = \Phi, \quad \tilde{\Phi}_{k+1} = (\nabla_x \tilde{\Phi}_k, f(x, 0, 0, t)) + \partial\tilde{\Phi}_k / \partial t \quad (k = 0, \ldots, n-1) \tag{12}$$

и определим для нее матрицу (4).

Теорема 4. *Пусть ранг матрицы* (4) *для функций* (12) *равен* s.

Тогда для того чтобы вектор-функция (11) *была в* A *корректирующей для задачи* (10), (2), *необходимо и достаточно, чтобы при* $\{x, t\} \in A$ *она удовлетворяла системе из* s *определяющих уравнений*

$$(\nabla_x \tilde{\Phi}_k, f(x, u, v, t)) = (\nabla_x \tilde{\Phi}_k, f(x, 0, 0, t)) \quad (k = 0, \ldots, s-1). \tag{13}$$

Теорема 4 следует из теоремы 1. Она показывает, что для решения задачи синтеза инвариантной системы необходимо располагать числом корректирующих воздействий, равным рангу инвариантности. Это число не зависит от размерности возмущающего вектора. В задачах синтеза слабо инвариантных систем $s = 1$, система (13) сводится к единственному уравнению, и мы приходим к методу синтеза, изложенному в [2].

Существенной особенностью синтеза с помощью системы определяющих уравнений (13) является выполнение условия

$$v(x, u, t)|_{u=0} = 0.$$

Это условие обеспечивает включение невозмущенных траекторий системы (10) в множество возмущенных траекторий синтезированной системы и, тем самым, позволяет сохранить в процессе синтеза неизменным поведение исследуемой функции $\Phi[x(t), t]$.

Техническим средством реализации рассматриваемого алгоритма синтеза являются корректирующие цепи, включаемые в схему регулирования объекта с заданными фиксированными характеристиками. Корректирующие функции описывают сигналы в корректирующих цепях и предписывают необходимый для реализации инвариантной системы состав измерений.

7°. Пример. В задаче

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = \cos x_2 [\sin x_2 + x_2 e^{(x_3^2 - x_1)}] + v_1, \\ \dot{x}_2 = \cos^2 x_2 - x_2 e^{(x_3^2 - x_1)} (\sin x_2 - u) - v_2, \quad \dot{x}_3 = (x_2 - x_1) u; \end{gathered} \tag{14}$$

$$I = e^{(x_1 - x_3^2)} \sin x_2 \tag{15}$$

получаем

$$\tilde{\Phi}_0 = e^{(x_1 - x_3^2)} \sin x_2, \quad \tilde{\Phi}_1 = e^{(x_1 - x_3^2)} \cos x_2, \quad \tilde{\Phi}_2 = x_2. \tag{16}$$

Здесь в $A = X \times t$ имеем $s = 2$, и с помощью первых двух уравнений (13) получаем

$$v_1 = 2x_3 (x_2, - x_1) u, \quad v_2 = x_2 e^{(x_3^2 - x_1)} u. \tag{17}$$

Подставив (17) в (14), приходим к системе

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = \cos x_2 [\sin x_2 + x_2 e^{(x_3^2 - x_1)}] + 2x_3 w, \\ \dot{x}_2 = \cos^2 x_2 - x_2 e^{(x_3^2 - x_1)} \sin x_2, \quad \dot{x}_3 = w, \end{gathered} \tag{18}$$

где

$$w = \varphi_1(x, u, t) = (x_2 - x_1) u. \tag{19}$$

Система (18) с возмущением w является порождающей для класса $C(\tilde{\Phi})$ с функциями (16).

Из (16) следует, что уравнение (5) для функции $I(t) = \Phi[x(t), t]$ на возмущенных траекториях системы (18), (19) имеет здесь вид

$$d^2 I / dt^2 = \Psi(I, dI / dt) = \operatorname{arc\,tg} [I (dI / dt)^{-1}] + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Значение k однозначно определяется заданием x_2. Поэтому Ψ является однозначной функцией I и dI / dt для $\{x, t\}$ из малой окрестности каждой точки пространства $X \times t$. Однако в пространстве $I \times dI / dt$ Ψ бесконечнозначна. Для задачи (18), (19), (15) условия теоремы 1 выполнены во всем пространстве $X \times t$. Поэтому сильная инвариантность системы (18), (19) относительно функции (15) по возмущению $u(t)$ имеет место в любой его ограниченной части.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Моск. обл.

Поступило
19 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Н. Петров, Инвариантные системы, в сборн. Техническая кибернетика в СССР, М., 1968. [2] В. В. Величенко, ДАН, 184, № 2 (1969). [3] Л. И. Розоноэр, Автоматика и телемех., 24, № 6, 7 (1963). [4] Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1965.