

В. ГЕРИШ

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТАМ Н. К. БАРИ*
О БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ И БАЗИСАХ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 6 VI 1971)

Н. К. Бари в работах (², ³) ввела при исследовании полных биортогональных систем и базисов в гильбертовом пространстве понятия системы Бесселя (базис Бесселя), системы Гильберта (базис Гильберта) и системы Фишера — Риса (базис Риса) и изучила их свойства, частично определяемые родством с полными ортонормированными системами. В частности, оказалось, что свойство системы Бесселя (системы Гильберта) для одной частичной системы полной биортогональной системы имплицитно свойство системы Гильберта (системы Бесселя) для сопряженной частичной системы. Системы Фишера — Риса характеризуются тем, что обе частичные системы полной биортогональной системы имеют свойство системы Бесселя (и, следовательно, также свойство системы Гильберта). Такие системы, которые можно рассматривать как взаимно однозначные и в обоих направлениях непрерывные отображения полных ортонормированных систем, оказываются базисами Шаудера. Это обстоятельство особо подчеркивается вторым из упомянутых выше обозначений. Остается заметить, что при любой перестановке элементов системы Бесселя, системы Гильберта и системы Фишера — Риса (базисы Риса) опять переходят в системы с теми же свойствами и что в случае базисов Риса речь идет о безусловных базисах.

В связи с работой Н. К. Бари (²) К. Бабенко (⁴) построил базис, не являющийся базисом Риса, но являющийся системой Бесселя, а М. Альтманом (⁵) была дана полная биортогональная система, частичные системы которой не обладают ни одним из исследованных Н. К. Бари свойств, кроме свойств базиса. Б. Гельбаум, наконец, доказал в (⁶), используя эти системы, существование условных базисов в гильбертовом пространстве.

В настоящей заметке мы будем таким образом обобщать понятия системы Бесселя и системы Фишера — Риса (базисы Риса), согласно Н. К. Бари, что нарушение описанной инвариантности первоначальных понятий при перестановке элементов будет возможно; далее, что обобщенные системы Фишера — Риса также имеют свойство базиса и что, в частности, условные базисы могут быть получены на основе обобщенного понятия базиса Риса.

Остается исследовать, насколько возможно исчерпать класс базисов Шаудера (соответственно нормированных) в гильбертовом пространстве с помощью обобщенного таким образом понятия базиса Риса. Эту задачу, которая сводится к обобщению составленного И. М. Гельфандом в (⁷) замечания о результатах Бари, мы будем рассматривать в особой заметке. Вопрос о возможности переноса полученных Бари результатов о близости систем элементов будет исследоваться впоследствии.

Обозначим буквой ε последовательность рода $\{\varepsilon_i: \varepsilon_i = \pm 1\}_1^\infty$ **, особо

* Жизнь и работа Н. К. Бари подробно описана в (¹).

** Случай конечного количества положительных или отрицательных знаков исключается без ограничения общности.

«определенную упорядочением знаков, и буквой Φ — полную биортогональную систему $(\{\varphi_i\}_1^\infty, \{\varphi'_i\}_1^\infty)$ рассматриваемого гильбертова пространства H .

Частичная система $\{\varphi_i\}_1^\infty$ от Φ называется ε -системой Бесселя, если выполнено условие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i |(f, \varphi'_i)|^2$$

в H всюду сходится.

Частичные системы $\{\varphi_i\}_1^\infty$ и $\{\varphi'_i\}_1^\infty$ от Φ называются ε -системами Ф и ш е р а — Р и с а, если речь идет об ε -системах Бесселя, т. е. если выполнены условия, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i |(f, \varphi'_i)|^2 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i |(f, \varphi_i)|^2$$

в H всюду сходятся.

Теорема. Частичные системы $\{\varphi_i\}_1^\infty$ и $\{\varphi'_i\}_1^\infty$ любой полной биортогональной системы Φ являются базисами, но не обязательно безусловными базисами, если они ε -системы Фишера — Риса.

В ⁽¹¹⁾ мы даем подробное доказательство теоремы, которое основывается на результатах, относящихся к аффинности самосопряженных операторов А. Винтнера ⁽⁸⁾ и Г. Кёте ⁽⁹⁾, как и на теории J -пространств ⁽¹⁰⁾ и на следующей лемме.

Лемма. Полная J -ортонормированная система $\{\psi_i\}_1^\infty$ тогда и только тогда является J -ортонормированным базисом, если, принимая за основу последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_i; \varepsilon_i = (J\psi_i, \psi_i)\}_1^\infty$ выполнено условие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i |(f, \psi_i)|^2$$

всюду сходится в H .

ε -Системы Фишера — Риса называются ε -базисами Риса, если свойство базиса должно быть особо подчеркнуто.

В заключение укажем, что при $\varepsilon = \{\varepsilon_i; \varepsilon_i = +1\}_1^\infty$ мы приходим к соотношениям, исследованным Н. К. Барин.

Институт по испытанию материалов
Западный Берлин

Поступило
14 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Некролог Н. К. Барин, УМН, 17, 1 (103), 121 (1962). ² Н. К. Барин, ДАН, 54, 383 (1946). ³ Н. К. Барин, Уч. зап. Московск. ун-в., Матем., 4, 69 (1951). ⁴ К. Вабенко, ДАН, 62, 157 (1948). ⁵ М. Альтман, ДАН, 69, 483 (1949). ⁶ B. Gelbaum, Proc. Am. Math. Soc., 2, 720 (1951). ⁷ И. М. Гельфанд, Уч. зап. Моск. ун-в., Матем., 4, 224 (1951). ⁸ A. Wintner, Math. Zs., 37, 254 (1933). ⁹ G. Köthe, ibid., 41, 137 (1936). ¹⁰ М. Г. Крейн, Сборн. Второй математической летней школы, Киев, 1965, стр. 15. ¹¹ W. Gerisch, Festschrift zur 100-Jahrfeier der Bundesanstalt für Materialprüfung, Berlin (in press).