Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 2

УДК 517.514

МАТЕМАТИКА

В. И. БУРЕНКОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА ФИНИТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОТКРЫТОГО МНОЖЕСТВА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 7 VI 1971)

Пусть E_n — n-мерное эвклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\Omega \subset E_n$ — произвольное открытое множество. Функция $f(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^r(\Omega)$, $r = 1, 2, \ldots, 1 \leqslant p < \infty$, если в Ω существуют обобщенные ([1]) частные производные $D^k f = \dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n \leqslant r$, и конечна норма

$$\| f \|_{W_p^r(\Omega)} = \sum_{|k| \leqslant r} \| D^k f \|_{L_p(\Omega)}. \tag{1}$$

Во многих вопросах наряду с пространствами $W_p^r(\Omega)$ приходится рассматривать пространства, представляющие замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций по норме (1). Известно, что если Ω — область с достаточно «хорошей» границей, то эти пространства состоят из функций $f \in W_p^r(\Omega)$, обращающихся в некотором смысле в нуль на границе $\Gamma(\Omega)$ вместе со своими производными до порядка $r - 1$ включительно. В статье Г. Г. Казаряна ([2]) доказано, что если

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \overline{\in} \Omega, \end{cases} \in W_p^r(E_n), \tag{2}$$

где область Ω допускает «локальный сдвиг», то функцию $f \in W_p^r(\Omega)$ можно приблизить с любой степенью точности функциями из $C_0^\infty(\Omega)$. В ([2]) модифицируется метод аппроксимации функции ее усреднением со сдвигом, ранее использованный Э. Гальярдо ([3]).

В работе автора ([4]) для произвольного открытого множества Ω получены необходимые и достаточные условия, при которых функцию $f \in C^r(\Omega)$ можно сколь угодно точно приблизить функциями из $C_0^\infty(\Omega)$. Эти условия имеют вид: для любого $x \in \Gamma(\Omega)$

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} D^k f(y) = 0, \quad |k| \leqslant r, \tag{3}$$

и в случае неограниченного открытого множества, кроме того,

$$\lim_{\substack{y \to \infty \\ y \in \Omega}} D^k f(y) = 0, \quad |k| \leqslant r. \tag{4}$$

В ([4]) получены также необходимые и достаточные условия на Ω, при которых условия (3), (4) для любой $f \in C^r(\Omega)$ эквивалентны тому, что определяемая равенством (2) функция $\Phi(x) \in C^r(E_n)$.

В настоящей заметке подобные результаты приведены для пространств $W_p^r(\Omega)$ при $p > n$. При доказательстве формулируемых теорем используется следующая лемма и следствия из нее.

Лемма. *Пусть $p > n$, Ω — область, звездная относительно открытого множества $S \subset \Omega$, и d — диаметр области Ω.*

Тогда для любой функции $f \in W_p^1(\Omega)$

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{1/p}(\operatorname{mes}S)^{-1/q}\|f\|_{L_q(S)} + \frac{d}{1-n/p}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{L_p(\Omega)},$$

где $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Обозначим, как обычно, через Ω_δ совокупность тех $x \in \Omega$, которые отстоят от границы $\Gamma(\Omega)$ более, чем на δ.

Теорема 1. *Пусть $p > n$ и $\Omega \neq E_n$ — произвольное открытое множество. Для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\|f\|_{L_p(\Omega-\Omega_\delta)} \leqslant c_1\delta^r \sum_{|k|=r}\|D^k f\|_{L_p(\Omega-\Omega_{2\delta})},$$

где c_1 зависит только от n, p и r.

Теорема 2. *Пусть $f \in W_p^r(\Omega)$, $r = 1, 2, \ldots, p > n$, где Ω — произвольное открытое множество в E_n. Для того чтобы существовала последовательность φ_s такая, что*

$$\varphi_s \in C_0^\infty(\Omega), \quad \lim_{s\to\infty}\|f-\varphi_s\|_{W_p^r(\Omega)} = 0, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы при $\delta \to 0$

$$\|f\|_{L_p(\Omega-\Omega_\delta)} = o(\delta^r). \tag{6}$$

Необходимость следует из теоремы 1; при доказательстве достаточности последовательность φ_s строится так же, как и в ([4]): $\varphi_s(x) = f_{1/s}(x)$, где

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n}\int_{\Omega_{2\delta}}\omega\left(\frac{x-y}{\delta}\right)f(y)\,dy$$

$\left(\text{здесь } \omega(z) \in C^\infty(E_n),\ \omega(z) = 0 \text{ при } |z| \geqslant 1,\ \int_{E_n}\omega(z)\,dz = 1\right).$

Достаточность справедлива при любом $p \geqslant 1$.

Следствие 1. *Для $f \in W_p^r(\Omega)$ при $p > n$ условие (6) эквивалентно условию*

$$\|D^k f\|_{L_p(\Omega-\Omega_\delta)} = o(\delta), \quad |k| \leqslant r-1. \tag{7}$$

Обозначим через $\Gamma'(\Omega) \subset \Gamma(\Omega)$ множество, всюду плотное в $\Gamma(\Omega)$, например, $\Gamma'(\Omega) = \Gamma(\Omega)$, или $\Gamma'(\Omega)$ — множество тех точек $x \in \Gamma(\Omega)$, которых можно коснуться каким-либо шаром (зависящим от x), лежащим в Ω.

Следствие 2. *Для $f \in W_p^r(\Omega)$ при $p > n$ условие (6) эквивалентно условию: для любого $x \in \Gamma'(\Omega)$*

$$\|f\|_{L_p(\Omega K_\delta^x)} \leqslant c_2\delta^r \sum_{|k|=r}\|D^k f\|_{L_p(\Omega K_\delta^x)},$$

где K_δ^x — шар радиуса δ с центром в точке x, а c_2 зависит только от n, p и r.

При $n = 1$ теорема 2 справедлива и при $p = n = 1$. В этом случае условие (7) для $\Omega = (a, b)$ означает, что

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_a^{a+\delta}|f^{(k)}|\,dx}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{b-\delta}^{b}|f^{(k)}|\,dx}{\delta} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Ниже мы приведем условия подобного вида, эквивалентные (6) и в общем случае.

Теорема 3. *Пусть $f \in W_p^r(\Omega)$, $p > n$, где Ω — произвольное открытое множество в E_n. Условие* (5) *эквивалентно тому, что*

$$\forall x \in \Gamma'(\Omega) \quad \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{\int\limits_{\Omega K_\delta^x} |D^k f|^q dx}{\operatorname{mes} \Omega K_\delta^k} \right)^{1/q} = 0, \quad |k| \leqslant r - 1. \tag{8}$$

При различных q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, условия (8) *эквивалентны.*

Из теоремы 3 при $q = \infty$ следует, что условие (5) равносильно тому, что функция $f \in W_p^r(\Omega)$ эквивалентна функции $\bar{f}$ такой, что для любого $x \in \Gamma(\Omega)$

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} D^k \bar{f}(y) = 0, \quad |k| \leqslant r - 1.$$

(см. формулы (3) и (4)). Самым «слабым» из эквивалентных условий теоремы 3 является условие: для любого $x \in \Gamma'(\Omega)$

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\int\limits_{\Omega K_\delta^x} |D^k f| \, dx / (\operatorname{mes} \Omega K_\delta^x) \right] = 0, \quad |k| \leqslant r - 1.$$

В теореме 3 речь идет о «поточечной» сходимости к нулю функции и ее производных при приближении к границе $\Gamma(\Omega)$. Ниже мы приведем условие, эквивалентное (5), которое выражается в терминах сходимости в среднем по «приграничной полосе».

Теорема 4. *Пусть $f \in W_p^r(\Omega)$, $p > n$, где Ω — открытое множество в E_n, удовлетворяющее условию*

$$\operatorname{mes}(\Omega - \Omega_\delta) \leqslant c_3 \delta, \tag{9}$$

где c_3 не зависит от δ. Условие (5) *эквивалентно условию: для любого шара K с центром в любой точке $x \in \Gamma'(\Omega)$*

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\int\limits_{K(\Omega - \Omega_\delta)} |D^k f|^q dx / (\operatorname{mes} K(\Omega - \Omega_\delta)) \right]^{1/q} = 0, \quad |k| \leqslant r - 1. \tag{10}$$

При различных q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, условия (10) *эквивалентны между собой.*

Можно привести пример, показывающий, что условие (9) нельзя ослабить, заменив условием

$$\operatorname{mes}(\Omega - \Omega_\delta) \leqslant c_3 \varphi(\delta) \delta,$$

какова бы ни была функция $\varphi(\delta) > 0$ такая, что $\varphi(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$.

Пусть ограниченное открытое множество Ω таково, что для любого шара K с центром в любой точке $x \in \Gamma(\Omega)$

$$c_4 \delta \leqslant \operatorname{mes} K(\Omega - \Omega_\delta) \leqslant c_5 \delta,$$

где c_4 и c_5 зависят только от Ω и K (по существу, это предположение о равномерной $(n-1)$-мерности границы $\Gamma(\Omega)$). Тогда условие (10) эквивалентно условию

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\int\limits_{\Omega - \Omega_\delta} |D^k f|^q dx / (\operatorname{mes}(\Omega - \Omega_\delta)) \right]^{1/q} = 0, \quad |k| \leqslant r - 1.$$

В заключение приведем теоремы, устанавливающие связь между условиями (5) и (2).

Т е о р е м а 5. *Пусть открытое множество* Ω *таково, что*

$$\Gamma(\Omega) = \Gamma(\overline{\Omega}) \tag{11}$$

и $f \in W_p^r(\Omega)$, $p > n$.

Тогда условия (2) *и* (5) *эквивалентны.*

Т е о р е м а 6. *Пусть* Ω — *открытое множество в* E_n *и пусть* $p > n$. *Для того чтобы для любой функции* $f \in W_p^r(\Omega)$ *условия* (2) *и* (5) *были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для любого шара* K *с центром в любой точке* $x \in \Gamma(\Omega)$

$$\text{mes}\,(K - \Omega) > 0. \tag{12}$$

Приведем еще характерный пример множества Ω, для которого выполняется (12), но не выполняется (11). Пусть S — совершенное нигде не плотное множество положительной меры (одномерной) на отрезке $[-1/2, 1/2]$; в качестве Ω можно взять множество $K - \underbrace{(S \times S \times \ldots \times S)}$, где K — единичный открытый шар в E_n.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Поступило 23 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.— Л., 1950; Новосибирск, 1962. [2] Г. Г. Казарян, Матем. заметки, 7, 45 (1967). [3] E. Gagliardo, Ricerche di mat., 7, 102 (1958). [4] В. И. Буренков, ДАН, 202, № 1 (1971).