

А. Д. ВЕНТЦЕЛЬ

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ С ЭЛЕМЕНТАМИ ПОРЯДКА $\exp\{-V_{ij}/(2\varepsilon^2)\}$

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 VI 1971)

В ряде задач, связанных с диффузионными процессами с малой диффузией (или эллиптическими дифференциальными операторами с малым параметром при старших производных; см. ^(2, 3)), возникают конечные цепи Маркова с вероятностями перехода порядка $\exp\{-V_{ij}/(2\varepsilon^2)\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Изучение асимптотики собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов с малым параметром оказывается связанным с изучением асимптотики собственных значений и собственных векторов матриц с элементами указанного вида. В этой заметке мы рассматриваем только собственные значения, не касаясь вопроса о собственных векторах. Результаты, касающиеся матриц, применяются затем к дифференциальному оператору с малым параметром.

1. Пусть S -конечное множество из s элементов и пусть в нем выделено подмножество W . Мы будем называть W -графом граф, состоящий из стрелок $m \rightarrow n$ ($m \in S \setminus W$, $n \in S$, $n \neq m$), если из каждой точки $m \in S \setminus W$ выходит ровно одна стрелка и в графе нет замкнутых циклов (W -графы вводятся и применяются к цепям Маркова в ⁽²⁾, § 7). Множество всех W -графов обозначим $G(W)$ ($G(S)$ состоит из одного только пустого графа); $G^{(k)}$ при $1 \leq k \leq s$ будет обозначать множество всех W -графов, где W пробегает всевозможные k -элементные подмножества S (т. е. всех графов без циклов из $s - k$ стрелок). Для обозначения графов будем употреблять букву g .

Пусть $P^\varepsilon = (p_{ij}^\varepsilon)$ — стохастическая матрица порядка s , зависящая от параметра, причем ее внедиагональные элементы $p_{ij}^\varepsilon \asymp \exp\{-V_{ij}/(2\varepsilon^2)\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (знак $\asymp$ означает, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon^2 \ln p_{ij}^\varepsilon = -V_{ij}$), $0 \leq V_{ij} \leq \infty$.

Положим для $1 \leq k \leq s$

$$V^{(k)} = \min_{g \in G^{(k)}} \sum_{(m \rightarrow n) \in g} V_{mn}. \quad (1)$$

(Заметим, что $V^{(s)} = 0$.) Предположим, что все $V^{(k)} < \infty$.

Теорема 1. Обозначим через $\lambda_1^\varepsilon = 1$, $\lambda_2^\varepsilon, \dots, \lambda_s^\varepsilon$ собственные значения матрицы P^ε , занумерованные в порядке убывания действительных частей.

Тогда для $k = 2, \dots, s$

$$\operatorname{Re}(1 - \lambda_k^\varepsilon) \asymp \exp\{-(V^{(k-1)} - V^{(k)})/(2\varepsilon^2)\}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заметим, что частью теоремы является следующее

Утверждение А. Ломаная, проведенная через точки $(k, V^{(k)})$, $k = 1, \dots, s$, выпукла вниз, т. е. $V^{(1)} - V^{(2)} \geq V^{(2)} - V^{(3)} \geq \dots \geq V^{(s-1)} - V^{(s)}$.

Далее, если для какого-то k имеет место случай «общего положения»

$$V^{(k-1)} - V^{(k)} \neq V^{(k)} - V^{(k+1)} \quad \text{при} \quad k < s, \quad (2a)$$

$$V^{(k-1)} - V^{(k)} \neq V^{(k-2)} - V^{(k-1)} \quad \text{при} \quad k > 2, \quad (2б)$$

то собственное значение λ_k^ε при малых ε — действительное и не кратное, так как его действительная часть имеет иной порядок, чем действительные части других собственных значений.

Доказательства теоремы мы не будем приводить; приведем только без доказательства вспомогательное утверждение и докажем утверждение А.

Лемма. Пусть A — матрица, в которой по диагонали стоят числа $1 - a_i$, а вне диагонали нули; $P = (p_{ij})$ — стохастическая матрица.

Тогда $\det(A - P)$ — многочлен относительно a_i , в котором коэффициент при $(-a_{i_1}) \dots (-a_{i_k})$ равен сумме произведений $\pi(g) = \prod_{(m \rightarrow n) \in g} p_{mn}$

где сумма берется по всем графам $g \in G\{i_1, \dots, i_k\}$. (В частности, для $k = 0$ получаем, что свободный член равен 0, так как $G(\phi) = \phi$; коэффициент при произведении всех $(-a_i)$ равен 1, так как $G(S)$ состоит из одного только пустого графа, а произведение с пустым множеством сомножителей полагается равным 1.)

Полагая $a_i = a$ для $i \in S$, получаем для $a = 1 - \lambda$ (λ — собственное значение) уравнение

$$A_1(-a) + A_2(-a)^2 + \dots + A_s(-a)^s = 0, \quad (3)$$

где A_k есть сумма $\pi(g)$ по $g \in G^{(k)}$. Легко видеть, что коэффициенты A_k^ε для матрицы P^ε имеют порядок (в смысле логарифмической эквивалентности, $\asymp$) $\exp\{-V^{(k)} / (2\varepsilon^2)\}$.

Утверждение А можно было бы доказать, оперируя только с графами, но мы воспользуемся результатами ⁽¹⁾ относительно собственных значений стохастических матриц. Так как утверждение касается только V_{ij} , но не конкретного вида p_{ij}^ε , мы можем положить $p_{ij}^\varepsilon = s^{-1} \exp\{-V_{ij} / (2\varepsilon^2)\}$ при $j \neq i$, $p_{ii}^\varepsilon = 1 - \sum' p_{ij}^\varepsilon$, где $\sum'$ распространяется на все $j \neq i$. Предположим, что выпуклость не имеет места; тогда можно найти прямую $ck + d \leq V^{(k)}$ при всех k , $ck + d = V^{(k)}$ при $k = k_1$ и k_2 , $ck + d < V^{(k)}$ при $k = k_0$, $1 \leq k_1 < k_0 < k_2 \leq s$. Если выбор таких k_1 , k_0 , k_2 неоднозначен, то наложим на этот выбор ограничение, состоящее в том, что $ck + d < V^{(k)}$ при всех k , $k_1 < k < k_2$. Обозначим через k_3 наименьшее k , для которого $ck + d = V^{(k)}$, а через k_4 — наибольшее такое k ; имеем: $k_3 \leq k_1$, $k_4 \geq k_2$. Сделаем в уравнении (3) замену $a \exp\{-c / (2\varepsilon^2)\} = z$; коэффициент при $(-z)^k$ будет тогда эквивалентен $b_k \exp\{(ck - V^{(k)}) \times \times (2\varepsilon^2)^{-1}\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $b_k > 0$. Умножим еще полученное уравнение на $\exp\{d / (2\varepsilon^2)\}$; при $\varepsilon \rightarrow 0$ те члены, для которых $V^{(k)} > ck + d$, исчезнут, и в пределе получим уравнение

$$b_{k_3}(-z)^{k_3} + \dots + b_{k_1}(-z)^{k_1} + b_{k_2}(-z)^{k_2} + \dots + b_{k_4}(-z)^{k_4} = 0. \quad (4)$$

У уравнения (4) имеется $k_4 - k_3$ ненулевых корней (с учетом кратности) $z_1, \dots, z_{k_4 - k_3}$ — те же, что и у уравнения

$$F(z) = b_{k_3} + \dots + b_{k_1}(-z)^{k_1 - k_3} + b_{k_2}(-z)^{k_2 - k_3} + \dots + b_{k_4}(-z)^{k_4 - k_3} = 0.$$

Корни $z_1, \dots, z_{k_4 - k_3}$ расположены на комплексной плоскости таким образом, что 0 принадлежит их выпуклой оболочке. Действительно. $F^{(k_1 - k_3 + 1)}(0) = 0$ (здесь мы используем, что $k_2 - k_1 \geq 2$); а известно, что корни любой производной многочлена лежат в выпуклой оболочке его корней.

Далее, у допредельного уравнения (при $\varepsilon > 0$) имеются корни $z_1^\varepsilon, \dots, z_{k_4 - k_3}^\varepsilon$, стремящихся к $z_1, \dots, z_{k_4 - k_3}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Но, согласно ⁽¹⁾, все корни z_k^ε так же, как корни a_k^ε уравнения (3), должны лежать на комплексной плоскости в пределах угла $|\arg z| \leq \alpha_0 < \pi/2$. Значит, в пределах того же угла должны лежать и их пределы z_k , что противоречит тому, что 0 принадлежит выпуклой оболочке $z_1, \dots, z_{k_4 - k_3}$. Полученное противоречие доказывает утверждение А.

2. Для исследования собственных значений дифференциальных операторов, связанных с марковскими процессами, полезным оказывается

Обобщение теоремы 1. Пусть для $a \in (e^{-\bar{c}/(2\varepsilon^2)}, e^{-\bar{c}/(2\varepsilon^2)})$ определена $P^\varepsilon(a)$ — матрица с элементами $p_{ij}^\varepsilon(a)$, непрерывно зависящими от a , с суммами по строкам, равными $1 + a_i^\varepsilon(a)$, причем

$$ae^{-h/(2\varepsilon^2)} \leq a_i^\varepsilon(a) \leq ae^{h/(2\varepsilon^2)};$$

$$\exp\{(-V_{ij} - h)/(2\varepsilon^2)\} \leq p_{ij}^\varepsilon(a) \leq \exp\{(-V_{ij} + h)/(2\varepsilon^2)\}, \quad j \neq i.$$

Пусть для $c_k = V^{(k-1)} - V^{(k)}$ выполнены условия (2), $\bar{c} \geq c_k + (s+1)h$, $c \leq c_k - (s+1)h$.

Тогда, если h достаточно мало (меньше определенной доли разности правых и левых частей в (2)), для всех достаточно малых ε существует $a = a(\varepsilon)$ в интервале от $\exp\{(-c_k - (s+1)h)/(2\varepsilon^2)\}$ до $\exp\{(-c_k + (s+1)h)/(2\varepsilon^2)\}$ такое, что 1 является k -м (не кратным) собственным значением матрицы $P^\varepsilon(a(\varepsilon))$; для остальных значений a (т. е. $|2\varepsilon^2 \ln a + c_k| \geq (s+1)h$) 1 не является k -м собственным значением матрицы $P^\varepsilon(a)$.

Теорема 1 содержится здесь как частный случай с p_{ij}^ε , не зависящими от a , и $a_i^\varepsilon(a) \equiv a$, $i \in S$.

3. Применим обобщение теоремы 1 к результатам (3) (определения и обозначения см. там же). В качестве S возьмем множество $\{1, 2, \dots, l, *\}$, $s = l + 1$, а в качестве матрицы $P^\varepsilon(a)$ — матрицу с элементами $q_{ij}^\varepsilon(a)$ ($i = 1, \dots, l$; $j = 1, \dots, l, *$), дополненную строкой $(0, \dots, 0, 1 + a)$; при этом к собственным значениям матрицы $Q^\varepsilon(a) = (q_{ij}^\varepsilon(a))$, $i, j = 1, \dots, l$ добавляется еще одно собственное значение, $1 + a$. Наибольшее собственное значение матрицы $Q^\varepsilon(a)$ (всегда действительное и не кратное) оказывается вторым по величине собственным значением расширенной матрицы, так что имеет место

Теорема 2. Пусть для оператора L^ε с малым параметром в области D выполняется условие A_D ; образуем величины $V^{(k)}$ по формуле (1), положив $V_{ij} = V_{ij}(D)$ ($i = 1, \dots, l$; $j = 1, \dots, l, *$; $j \neq i$), $V_{*,j} = +\infty$.

Тогда для наибольшего собственного значения λ_1^ε оператора L^ε с нулевыми условиями на границе области при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$-\lambda_1^\varepsilon \asymp \exp\{-(V^{(1)} - V^{(2)})/(2\varepsilon^2)\}.$$

Пример. Пусть $l = 4$, $V_{ij}(D)$ задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 8 & 8 & 13 \\ \infty & 6 & 0 & 6 & 10 \\ \infty & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

(в последнем столбце стоят $V_{i*}(D)$; приведенные значения совместимы с расположением особых множеств для оператора с малым параметром, которое приведено в качестве примера в (2), рис. 10.1—10.2). Величина $V^{(3)}$ равна 0 независимо от данных $V_{ij}(D)$; находим $V^{(4)} = V^{(3)} = 0$ (минимум достигается, например, для графов $1 \rightarrow 2$, соответственно, $1 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 2$); $V^{(2)} = 6$ (например, для графа $1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 2$); $V^{(1)} = 18$ ($1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow *$, $4 \rightarrow 2$). Получаем, что абсолютная величина наибольшего собственного значения оператора с малым параметром $\lambda_1^\varepsilon \asymp e^{-12/(2\varepsilon^2)}$; для матрицы $Q^\varepsilon(a)$ (см. (3)) можно указать также оценки для следующих собственных значений. Заметим, что константа 12 в показателе экспоненты, задающей асимптотику λ_1^ε , не совпадает ни с одним из $V_{ij}(D)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. А. Дмитриев, Е. Б. Дынкин, ДАН, 49, 3, 159 (1945). ² А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, УМН, 25, 1 (151), 3 (1970). ³ А. Д. Вентцель, ДАН, 202, № 1 (1971).