Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 2

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Е. В. ВОРОНОВСКАЯ

ПРОБЛЕМЫ ЛАГРАНЖЕВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 VI 1971)

1. За основную характеристику аналитической на $[0, 1]$ функции примем параметр R из следующей теоремы.

Теорема ([1]). *Пусть $f(x)$ аналитична внутри эллипса с фокусами в точках 0 и 1 и имеет особенности на его контуре. Если $Y_p^*(x)$ — полином наилучшего приближения к $f(x)$ и $\max\limits_{[0,1]} |f(x) - Y_p^*(x)| = L_p$, то*

$$\overline{\lim_{p}} \sqrt[p]{L_p} = 1/R, \tag{1}$$

где $R = 2(a + b)$ — сумма осей эллипса, и, следовательно, $R > 1$.

Справедливо и обратное утверждение ([1]): *если для $f(x) \in C_{[0,1]}$ имеет место* ([1]), *то $f(x)$ аналитична в упомянутом эллипсе.*

В семействе софокусных эллипсов с параметром R отметим зависимости $c = {}^1/_2$, $a = {}^1/_4(R + 1/R)$, $b = {}^1/_4(R - 1/R)$. Обозначив через $\rho(t, x)$ расстояние любой точки $M(x)$ на эллипсе до любой точки $t \in [0, 1]$, имеем границы $a - {}^1/_2 \leqslant \rho(t, x) \leqslant a + {}^1/_2$. Эти границы достигаются, например, для $f(x)$, имеющей одну особую точку $x = a$. Во всех случаях имеет место $b > 0$, $a > {}^1/_2$; $R > 1$. Примем обозначение: K_R есть класс функций, аналитичных в эллипсе с параметром R.

Теорема 1. *Если $f(x) \in K_R$ и удовлетворяет условию: для всех $t \in [0, 1]$ радиус сходимости r_t соответственного разложения Тэйлора*

$$r_t > A > 1, \tag{2}$$

то все лагранжевы процессы для $f(x)$ сходятся равномерно на $[0, 1]$ или кратко: все (л) суть (w).

Для фиксированного t имеем:

$$f(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \ldots \pm \frac{f^{(p+1)}(t)}{(p+1)!}(x - t)^{p+1} + \ldots$$

По условию теоремы можно взять $1 < A_1 < A$ и при $|x - t| = A_1$ имеем $\frac{f^{(p+1)}(t)}{p+1)!} A_1^{p+1} \to 0$, или $|f^{(p+1)}(t)| / (p + 1) \leqslant 1 / A_1^{p+1}$. Переходим к любому (л)-процессу с матрицей $[\rho]$.

$$f(x) - J_p(x) = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} \prod (x - \rho_i^{(p)}), \quad \xi_+^{(p)} \in [0,1];$$

тогда
$$|f(x) - J_p(x)| < \frac{|f^{(p+1)}(\xi)|}{(p+1)!} \cdot 1 \leqslant \left(\frac{1}{A_1}\right)^{p+1}.$$

Следствие 1. *Для получения $r_t > A > 1$ достаточно взять $a - {}^1/_2 > 1$ независимо от расположения особых точек на контуре; это дает $a > {}^3/_2$; $b > \sqrt{2}$; $R \geqslant 6$. Итак, в классах $K_{R \geqslant 6}$ все (л) суть (w).*

Следствие 2. *Быстрота сходимости всех (л)-процессов в этих классах не ниже $1 / A_1^p$. Отметим, что границу $R \geqslant 6$ можно понизить, и притом значительно, если задаться положением особой точки, например, $x = {}^1/_2 + bi$; тогда, $b \leqslant r_t \leqslant a$ и достаточно взять $b > 1$, что дает $R \geqslant 4{,}25$.*

Следствие 3. *На основе теоремы 4 статьи* ([2]) *имеем: для $F_p(x) = f(x) - Y_p^*(x)$ число главных нулей N_p на $[0, 1]$*

$$N_p < 4Rp \quad \textit{при} \quad 6 \leqslant R > \infty. \tag{3}$$

Условие (2) теоремы 1 только достаточно. Необходимые и достаточные условия даются в теореме В. И. Крылова [3]: $f(x)$ тогда и только тогда имеет все (л) и (w), если она аналитична внутри двух кругов радиуса > 1 с центрами в концах $[0, 1]$. Мы, однако, предпочитаем иметь дело с эллипсом Бернштейна, непосредственно связанным с L_p.

Докажем, что неравенство (3) может быть усилено. Пусть $[l]_p \subset [0, 1]$, длина $l = \mathrm{const}$, но $[l]_p$ может перемещаться.

Теорема 2. *Если непрерывная $f(x)$ такова, что* а) *ее $F_p(x)$ на $[l]_p$ хотя бы выборочно при $\tilde{p} \to \infty$ имеет не менее, чем p главных нулей*; б) $L_p \geqslant (2l / (1-l))^p$, *то для $f(x)$ имеется расходящийся (л)-процесс.*

Заметим, так как $2l / (1-l) = \mathrm{const}$, то имеет смысл рассматривать только $2l / (1-l) < 1$, т. е. $l < 1/3$. Построим систему полиномов [2]

$$Q_p(x) = \pm \Pi(x - \sigma_i^{(p)}) / \max_{[0,1]} |\Pi(x - \sigma_i^{(p)})|,$$

где $\sigma_i^{(p)} \in [l]_p$ суть соответственные нули $F_p(x)$. Имеем процесс $F_p(x) - A_p Q_p(x)$ с p точками интерполяции при любых (A_p); $(p+1)$-ю точку берем $\theta^{(p)} \in [l]_p$, в которой $|F_p(x)| = L_p$; условие $F_p(\theta^{(p)}) - A_p Q_p(\theta^{(p)}) = 0$ дает $A_p = L_p / |Q_p(\theta^{(p)})|$. Здесь $|Q_p(\theta^{(p)})| \leqslant \dfrac{\max_{[l]_p} |\Pi(x - \sigma_i^{(p)})|}{\max_{[0,1]} |\Pi(x - \sigma_i^{(p)})|}$. Тогда, согласно оценке (8) в [2], имеем $|Q_p(\theta^{(p)})| < (2l / (1-l))^p \leqslant L_p$ и, согласно теореме 1 в [2], процесс расходится.

Следствие. *Если $f(x) \in K_R$, т. е. $L_p = O(1 / R^p) \geqslant (2l / (1-l))^p$, тогда $R < (1-l) / (2l)$ или $l < 1 / (2R+1)$; наличие на $[l]_p$ нулей $F_p(x)$ числом $\geqslant p$ всегда обеспечивает существование расходящегося (л)-процесса. Если же $f(x)$ такова, что все (л) суть и (w), то на $[l]_p$ при $l < 1 / (2R+1)$ число нулей $F_p(x)$ меньше p. Итак, N_p на* $[0, 1]$

$$N_p < (2R+1)p \tag{4}$$

в гарантирующих пределах $6 \leqslant R < \infty$.

В формулах типа (3) и (4) мажоранта ослабевает с возрастанием R, что вообще не соответствует существу дела: во всех случаях $N_p \geqslant p+1$ и для некоторых функций как с высокой, так и с низкой характеристикой R, имеем $N_p = p+1$. Для этого достаточно взять $f(x)$, у которой при каждом p на $[0, 1]$ $f^{(p)}(x)$ знакопостоянна, например, $1 / (x - \gamma)$ при $\gamma > 1$.

2. Рассмотрим поведение (л)-процессов для аналитической $f(x)$ при $r_t < 1$ для всех $t \in [0, 1]$.

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in K_R$ и имеет место*

$$0 < \alpha \leqslant r_t \leqslant \beta < 1 \tag{5}$$

с достижением границ; если найдется инфинитарная выборка $\tilde{p} \to \infty$, общая для всех $t \in [0, 1]$, при которой

$$A_1 < \sqrt[p]{\frac{|f^{(p)}(t)|}{p!}}, \tag{6}$$

где $A_1 > 1$ и $\mathrm{const}(\tilde{p}, t)$, то для $f(x)$ имеются расходящиеся (л)-процессы такие, что в одной точке процесс собственно расходится, а в другой — этот же процесс сходится с быстротой выше любой малой прогрессии.

Заметим прежде всего, что в эллипсе Бернштейна при любом расположении особой точки $\min_{(t,x)} \max r_t > a > 1/2$; следовательно, $\beta > 1/2$; малость α эллипсом не ограничена; итак, в (5) $\beta > 1/2$. Далее, имеем

$$\frac{|f^{(p)}(t)|}{p!} = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - t)^{p+1}} \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\alpha_1^{p+1}} 2\pi\alpha_1 = \frac{M}{\alpha_1^p} < A_2^p;$$

здесь C — окружность с центром t и $|\xi - t| = \alpha_1 < \alpha$; $M = \max |f(x)|$ на софокусном эллипсе меньшего размера, A_2 — любое фиксированное число, большее $1 / \alpha$.

Итак, $A_1 < \sqrt[p]{\dfrac{|f^{(p)}(t)|}{p!}} < A_2$, где левое неравенство справедливо по общей выборке $p \to \infty$. Отметим еще, что

$$1 < 1/\beta \leqslant 1/r_t = \overline{\lim_p} \sqrt[p]{|f^{(p)}(t)|/p!} \leqslant 1/\alpha < A_2,$$

где всегда $1/\beta < 2$. При $t = t_0$ имеется выборка $\tilde{p}'$, дающая $\lim\limits_{\tilde{p}} \sqrt[p]{|f^{(p)}(t)|/p!} = 1/\beta < 2$; следовательно, $A_1 < 2$.

Теперь возьмем любой (л)-процесс с матрицей $[\rho]$. Имеем

$$A_1^{p+1} \left| \prod_1^{p+1} (x - \rho_i^{(p)}) \right|_{\widetilde{pH}} < |f(x) - J_p(x)| = \frac{|f^{(p+1)}(\xi)|}{(p+1)!} |\Pi(x - \rho_i^{(p)})| <$$

$$< A_2^{p+1} \, |\Pi(x - \rho_i^{(p)})|. \qquad (7)$$

Из неравенств (7) видно, что поведение процесса существенно зависит от $[\rho]$. Рассмотрим частные случаи.

1) Сосредоточенная матрица со строкой $1/p,\ 1/(p+1), \ldots, 1/(2p)$. При $x = 1$ имеем $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p+1} < \left| \prod\limits_1^{p+1} (1 - \rho_i^{(p)}) \right| < \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^p$, что в пределе дает границы $1/e$ и $1/\sqrt{e}$. Расхождение процесса порядка A_1^p. Та же матрица при $x = 0$ дает $\prod\limits_1^{p+1} \rho_i^{(p)} = \frac{1}{p} \frac{1}{p+1} \cdots \frac{1}{2p} < \frac{1}{p^p}$, и процесс сходится с быстротой порядка $(A_2/p)^p$.

2) Возьмем не столь сгущенную матрицу, но все же не измельчающую сегмент $[0, 1]$. Пусть $\rho_i^{(p)} \in [0, \gamma]$, где $\gamma \leqslant 1/2$. Тогда при $x = 1$ $\prod\limits_1^{p+1} (1 - \rho_i^{(p)}) > (1 - \gamma)^{p+1}$; при $x = 0$ $\Pi \rho_i^{(p)} < \gamma^{p+1}$. Пусть A_1 и A_2 известны; если взять $A_1(1 - \gamma) > 1$, процесс расходится в точке 1; если взять $A_2 \gamma < 1$, процесс сходится в точке 0. Для объединения обоих случаев в одном процессе следует при $1/A_1 + 1/A_2 < 1$ взять $\gamma < 1/A_2$; при $1/A_1 + 1/A_2 > 1$ взять $\gamma < 1 - 1/A_1$.

3) Чебышевская матрица, состоящая из нулей $T_{p+1}(x) = \cos(p+1) \times \times \arccos(2x - 1)$; обозначим их через (τ_i); имеем $\max\limits_{[0,1]} |\Pi(x - \tau_i)| = \dfrac{2}{4^{p+1}}$. Известно, что в данном случае этот процесс равномерно сходится на $[0, 1]$. Что касается правой границы, то при условии $\alpha > 1/4$, имеем $A_2 < 4$ и процесс заведомо сходится с быстротой малой прогрессии.

4) Эквидистантная матрица со строкой $0,\ 1/p,\ 2/p, \ldots, (p-1)/p,\ 1$. Найдем мажоранту для $\Pi(x - \rho_i^{(p)})$. Пусть $k/p \leqslant x \leqslant (k+1)/p$ на интервале $[k]$.

$$\max_{[k]} \left| \prod \left(x - \frac{i}{p}\right) \right| < \frac{(k+1)!}{p^{k+1}} \frac{(p-k)!}{p^{p-k}} < \frac{k!\,(p-k)!}{p^p} \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Тогда $$\max_{[0,1]} \left| \Pi\left(x - \frac{i}{p}\right) \right| < \max_{(k)} \frac{k!\,(p-k)!}{p^p} = \frac{p!}{p^p} \sim \sqrt{2\pi p}\, \frac{1}{e^p}.$$

Таким образом, если $\alpha > 1/e$, т. е. $A_2 < e$, то процесс сходится равномерно на $[0, 1]$.

Замечание. Никакой малый эллипс Бернштейна не гарантирует условие $r_t < 1$, если не указывается положение особых точек, так как $a > 1/2$ и $a + 1/2 > 1$. При особой точке $1/2 + bi$, имеем $b \leqslant r_t \leqslant a$ и достаточно взять $a < 1$; тогда $b < \sqrt{3}/2$ и $R < 3{,}7$.

Приведем пример функции, удовлетворяющей условиям (7): $f(x) = 1 / (x + {}^1/_3) + 1 / (x - {}^4/_3)$. Здесь ${}^1/_3 \leqslant r_i \leqslant {}^5/_6$ и условие (5) выполнено, $a = {}^5/_6$, $b = {}^2/_3$, $R = 3$. Проверим наличие выборки

$$|f^{(p)}(x)|/p! = |1 / (x + {}^1/_3)^{p+1} + (-1)^{p+1} / ({}^4/_3 - x)^{p+1}|;$$

при $x \in [0, 1]$ и p нечетном оба слагаемых положительны; легко вычислить, что $\varphi(x) = 1 / (x + {}^1/_3)^{p+1} + 1 / ({}^4/_3 - x)^{p+1}$ (p нечетно) имеет minimum при $x = {}^1/_2$, равный $2({}^6/_5)^{p+1}$ и maxima на границах, равные $3^{p+1} + ({}^3/_4)^{p+1}$. Итак, можно взять $A_1 = {}^6/_5$ и $3 < A_2 < 4$. Чебышевский процесс сходится равномерно с быстротой прогрессии.

3. При изучении хода различных лагранжевых процессов нам представляется удобным классифицировать непрерывные функции: аналитические на $[0, 1]$ функции уже распределены по классам K_R при $1 < R < \infty$. Добавим K_∞ — класс целых функций, куда попадут все полиномы.

Для не аналитических функций предлагается следующее разбиение: $f(x)$ относится к классу $K^{(m)}$ ($m > 0$ и целое) тогда и только тогда, когда $f(x)$ имеет непрерывную на $[0, 1]$ $f^{(m)}(x)$ и не имеет непрерывной на $[0, 1]$ $f^{(m+1)}(x)$; дополнение: $K^{(0)}$ есть класс непрерывных на $[0, 1]$ $f(x)$, не имеющих непрерывной на $[0, 1]$ $f'(x)$. $K^{(\infty)}$ — класс функций с непрерывными производными любого порядка, но не аналитических на $[0, 1]$.

Такое разбиение обеспечивает необходимую разобщенность классов (полнота нам не обязательна). Отметим некоторые

Следствия. 1) *Сумма двух функций, принадлежащих различным классам, принадлежит низшему из двух классов. Класс суммы двух функций одного класса не понижается, но может повыситься.*

2) *Если для $f(x) \in K^{(m)}$ имеется смешанный (л)-процесс с матрицей $[\rho]$, то в $K^{(m)}$ имеется бесчисленное множество функций, для которых матрица $[\rho]$ дает такие же (л)-процессы, т. е. поведение этих процессов в любой $x_0 \in [0, 1]$ одинаково.*

Например, С. Н. Бернштейн доказал ([4]), что для $|2x - 1| \in K^{(0)}$ (л)-процесс с эквидистантной матрицей $[\rho]$ расходится повсюду, за исключением точек 0 и 1. Совершенно такое же поведение дает $[\rho]$ для любых функций вида $\alpha|2x - 1| + \beta\varphi(x)$ при $\varphi(x) \in K_{R\geqslant 6}$; α, β — любые действительные числа ($\alpha \neq 0$). В самом деле, все эти функции принадлежат $K^{(0)}$. Если $[\rho]$ дает соответственно (л)-процессы $|2x - 1| - J_p^{(1)}(x)$ и $\varphi(x) - J_p^{(2)}(x)$, то соответственно (л)-процесс для суммы есть

$$\alpha|2x - 1| + \beta\varphi(x) - [\alpha J_p^{(1)}(x) + \beta J_p^{(2)}(x)] = \alpha[|2x - 1| - J_p^{(1)}(x)] + \beta[\varphi(x) - J_p^{(2)}(x)].$$

По условию $R \geqslant 6$, второе слагаемое высшего порядка малости и ход процесса определяется первым слагаемым.

3) *Если $f(x) \in K^{(m)}$ имеет (л)-процесс, расходящийся при $x = x_0$, то в классе $K^{(n)}$ при $n < m$ имеются функции с (л)-процессами точно такого же поведения в x_0, а именно, при той же матрице $[\rho]$.*

Действительно, положим, $[\rho]$ дает для $\varphi(x) \in K^{(n)}$ процесс, сходящийся в x_0, тогда $\psi(x) = \varphi(x) + f(x) \in K^{(n)}$, и $[\rho]$ дает для $\psi(x)$ процесс, расходящийся в x_0 с тем же характером, что для $f(x)$.

Отсюда очевидно следует, если матрица $[\rho]$ во всем классе $K^{(m)}$ дает равномерно сходящиеся процессы, то тем более во всех высших классах.

Ленинградский электротехнический институт связи им. М. А. Бонч-Бруевича
Поступило 29 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. [2] Е. В. Вороновская, ДАН, 202, № 1 (1971). [3] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, Конструктивная теория функций комплексного переменного, «Наука», 1964. [4] С. Н. Бернштейн, Труды, 1, Изд. АН СССР, 1952.