

Р. В. АМБАРЦУМЯН

О СЛУЧАЙНЫХ ПЛОСКИХ МОЗАИКАХ

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 9 III 1971)

В настоящей заметке обсуждается одна частная постановка старой задачи о восстановлении характеристик двумерной геометрической картины по ее сечениям прямыми линиями. Рассматриваемая здесь «двумерная картина» является случайной (с.) мозаикой T , т. е. случайным разбиением плоскости на ограниченные выпуклые многоугольники, причем предполагается, что T стохастически инвариантна относительно группы всех эвклидовых движений плоскости (однородность и изотропность T). «Характеристики», подлежащие восстановлению, суть вероятности, связанные со с. мозаикой T . При решении подобных задач классической традиции соответствовало бы обращение лишь к той информации, которая содержится в распределении случайной точечной последовательности $\{\mathcal{P}_i\}$, образуемой пересечениями ребер с. мозаики T с произвольной фиксированной прямой L на плоскости, $\{\mathcal{P}_i\} = T \cap L$.



Рис. 1. Узел типа «сучок»

Некоторые новые результаты в интегральной геометрии дают возможность использовать, помимо $\{\mathcal{P}_i\}$, также и случайные углы ψ_i , под которыми происходит пересечение ребер T с L в точках $\mathcal{P}_i$. Точнее говоря, сведения о распределении с. мозаики T предлагается извлекать из предполагаемого известным совместного распределения случайной маркированной точечной последовательности (м.т.п.) $\{\mathcal{P}_i, \psi_i\}$ (в смысле ⁽¹⁾). Здесь важно то, что в практике углы ψ_i могут быть определены с помощью локальных измерений вдоль прямой L , а также что распределение м.т.п. $\{\mathcal{P}_i, \psi_i\}$ поддается вычислению в ряде теоретических моделей. Например, в случае так называемой простейшей с. мозаики, т. е. с. мозаики, образованной прямыми линиями, независимо проведенными на плоскости (составляющими пуассоновское поле прямых линий, см. ⁽²⁾), имеем

$$P(d\tau, d\psi) = \prod_{i=1}^m \lambda d\tau_i \cdot \prod_{i=1}^m \frac{1}{2} \sin \psi_i d\psi_i, \quad (1)$$

где $P(d\tau, d\psi)$ есть вероятность того, что в интервалах длины $d\tau_i$, некоторым образом размещенных на L , будет лежать по одной точке из $L \cap T$, а соответствующие углы будут лежать в интервалах $(\psi_i, \psi_i + d\psi_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Что касается эффективности предлагаемого подхода с точки зрения даваемого им объема сведений о распределении с. мозаики T , то на этом пути удастся получить даже некоторые результаты единственности, верные в классе $\mathcal{R}$ однородных и изотропных с. мозаик, удовлетворяющих некоторому довольно общему условию регулярности ⁽³⁾.

Обозначим через $\mathcal{A}$ класс с. мозаик, с вероятностью 1 не имеющих узлов типа сучок (см. рис. 1).

Теорема. Каждая $T \in \mathcal{R} \cap \mathcal{A}$, для которой в м.т.п. $\{\mathcal{P}_i, \psi_i\}$ последовательности $\{\mathcal{P}_i\}$ и $\{\psi_i\}$ независимы, а $\{\psi_i\}$ есть последовательность независимых случайных величин, является смесью простейших мозаик, т. е. про-

стейшей мозаикой со случайным значением λ . В частности, каждая $T \in \mathcal{RA}$, для которой выполняется (1), является простейшей случайной мозаикой.

Рассмотрим другой пример использования распределения м.т.п. $\{\mathcal{P}_i, \psi_i\}$ в данном круге вопросов.

Для всякой выпуклой фигуры D на плоскости с кусочно-гладкой границей и всякой непрерывно дифференцируемой на $(0, \infty)$ функции $f(u)$ справедливо тождество ⁽³⁾

$$\iint_{D \cap L \neq \emptyset} f(\lambda) dL = \iint_{D \cap L \neq \emptyset} f'(\lambda) \lambda \operatorname{ctg} \psi' \operatorname{ctg} \psi'' dL + \sum_j F(s_j), \quad (2)$$

где dL — элемент инвариантной меры прямых на плоскости (см. ⁽⁴⁾), λ — длина хорды $L \cap D$, ψ' и ψ'' — пара углов пересечения L с ∂D , лежащих внутри D , в одной полуплоскости, s_j — длины прямолинейных участков на

$$\partial D, f'(u) = \frac{d}{du} f(u), F(x) = \int_0^x f(u) du. \quad \text{Сумма в (2) берется по всем пря-$$

молинейным участкам ∂D , в частности, если D — многоугольник, то s_j — длины сторон, а суммирование производится по всем сторонам.

Пусть T_0 — фиксированная мозаика, K_r — круг радиуса r с центром в начале координат на плоскости, D_i — выпуклые области, на которые T_0 разбивает K_r . Каждая из областей D_i является либо многоугольником мозаики T_0 , либо частью такового, высекаемого границей K_r . Обозначим через $\chi_i(L)$ длину $D_i \cap L$, ψ'_i, ψ''_i — углы ψ' и ψ'' , отнесенные к области D_i , s_{ij} — длину j -го прямолинейного участка на ∂D_i . Запишем (2) для каждой области D_i и просуммируем по всем $D_i \subset K_r$. Получим

$$\iint \sum_{D_i \subset K_r} f(\chi_i(L)) dL = \iint \sum_{D_i \subset K_r} f'(\chi_i) \chi_i \operatorname{ctg} \psi'_i \operatorname{ctg} \psi''_i dL + \sum_{D_i \subset K_r} \sum_j F(s_{ij}). \quad (3)$$

Будем считать, что (3) написано для каждой реализации случайной мозаики T , и усредним (3) по ансамблю реализаций (операцию усреднения обозначим чертой):

$$\overline{\iint \sum_{D_i \subset K_r} f(\chi_i) dL} = \overline{\iint \sum_{D_i \subset K_r} f'(\chi_i) \chi_i \operatorname{ctg} \psi'_i \operatorname{ctg} \psi''_i dL} + \overline{\sum_{D_i \subset K_r} \sum_j F(s_{ij})}. \quad (4)$$

Подчеркнем, что в (4), как и в (3), интегралы берутся по $L \cap K_r = \phi$.

В силу однородности и изотропии T величины под интегралами по dL в (4) зависят только от длины z хорды, которую составляет $L \cap K_r$, причем эти величины описываются в терминах распределения м.т.п. $\{\mathcal{P}_i, \psi_i\}$. Действительно, для каждой фиксированной прямой L

$$\overline{\sum_{D_i \subset K_r} f(\chi_i(L))} = \overline{\sum_{k=1}^N f(I_k)} = a(z), \quad (5)$$

$$\overline{\sum_{D_i \subset K_r} \chi_i f'(\chi_i) \operatorname{ctg} \psi'_i \operatorname{ctg} \psi''_i} = - \overline{\sum_{k=1}^N f'(I_k) I_k \operatorname{ctg} \psi_k \operatorname{ctg} \psi_{k+1}} = -\beta(z, r),$$

где $I_1, \dots, I_N$ — интервалы, на которые разбивается отрезок длины z , лежащий на L , точками случайной последовательности $\{\mathcal{P}_i\}$. Расположение углов ψ_i указано на рис. 2, причем $\operatorname{ctg} \psi_i = z^{-1} \sqrt{4r^2 - z^2}$, $\operatorname{ctg} \psi_{N+1} = -z^{-1} \sqrt{4r^2 - z^2}$, а углы $\psi_2, \dots, \psi_N$ принадлежат случайной последовательности $\{\mathcal{P}_i\}$.

В двойной сумме в правой части (3) перейдем к «сквозной» нумерации сторон (и их частей) многоугольников мозаики T_0 , попадающих в K_r , т. е. положим

$$\sum_{D_i \subset K_r} \sum_j F(s_{ij}) = \sum_{k=1}^{M_r} F(s_k). \quad (6)$$

При этом сторона, служащая стороной одновременно двух многоугольников, вносит в сумму по k двойной вклад. В частности, $\sum_{k=1}^{M_r} s_k = 2\mathcal{L}_r$, где $\mathcal{L}_r$ —

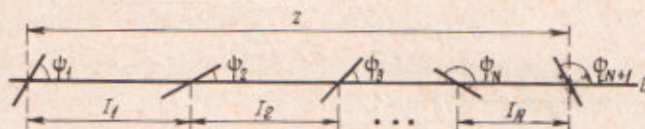


Рис. 2. Картина на $L \cup K_r$

общая длина всех ребер мозаики T_0 в K_r . В силу (5) для круга конечного радиуса r из (4) получаем

$$\sum_{k=1}^{M_r} F(s_k) = \pi \int_0^{2r} \frac{[a(z) + \beta(z, r)] z dz}{\sqrt{4r^2 - z^2}}. \quad (7)$$

Можно ожидать, что предельный переход ($r \rightarrow \infty$) в (7) позволит избавиться от краевых эффектов и, следовательно, приведет к более наглядному результату.

Предположим, что однородная с. последовательность $\{\mathcal{P}_i\}$ имеет конечную интенсивность λ , в силу чего

$$\bar{N} = \lambda z - 1. \quad (8)$$

По теореме Крофтона ⁽⁴⁾ имеем

$$\iint_{L \cap K_r \neq \emptyset} (N - 1) dL = 2\mathcal{L}_r. \quad (9)$$

Усредняя (9) по ансамблю реализаций, получаем

$$\iint_{L \cap K_r \neq \emptyset} (\bar{N} - 1) dL = 2\bar{\mathcal{L}}_r + 2\pi r. \quad (10)$$

Учитывая, что $\iint_{L \cap K_r \neq \emptyset} z dL = \pi^2 r^2$, из (8) — (10) получаем

$$\iint_{L \cap K_r \neq \emptyset} \bar{N} dL = 2\bar{\mathcal{L}}_r + 2\pi r = \lambda \pi^2 r^2 - 2\pi r. \quad (11)$$

Положим $f(u) = e^{-tu}$ и предположим, что существуют пределы

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^N e^{-tI_k}}{\bar{N}} = w(t), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^N e^{-tI_k} \operatorname{ctg} \psi_k \operatorname{ctg} \psi_{k+1}}{\bar{N}} = u(t).$$

При выполнении предельного перехода, определяющего $u(t)$, предполагается, что значения $\operatorname{ctg} \psi_i$ и $\operatorname{ctg} \psi_{N+1}$ поддерживаются постоянными. Из (11)

и вида ядра в (7) тогда следует существование предела

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mathcal{L}_r} \sum_{k=1}^{\overline{M_r}} F(s_k) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mathcal{L}_r} \sum_{k=1}^{\overline{M_r}} \frac{1 - e^{-ts_k}}{t}. \quad (12)$$

В свою очередь, если существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\overline{\mathcal{L}_r} \cdot (\overline{M_r})^{-1} = l < \infty,$$

то существует предел

$$v(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\overline{M_r}} \sum_{k=1}^{\overline{M_r}} e^{-ts_k},$$

причем, как это следует из (7) и (12),

$$\frac{1}{l} \frac{1 - v(t)}{t} = w(t) - tu(t). \quad (13)$$

* Отметим, что в эргодическом случае l имеет смысл средней длины произвольной стороны составляющих случайную мозаику многоугольников, $v(t)$ — преобразования Лапласа соответствующего распределения, $w(t)$ приобретает смысл преобразования Лапласа распределения длины произвольного интервала между последовательными точками в $\{\mathcal{P}_i\}$, а $u(t)$ — аналогичный смысл в терминах $\{\mathcal{P}_i, \psi_i\}$.

В частности, если $u(t) \equiv 0$, что имеет место, например, когда $\{\psi_i\}$ не зависит от $\{\mathcal{P}_i\}$, а углы в $\{\psi_i\}$ попарно независимы, получаем соотношение

$$\frac{1}{l} \frac{1 - v(t)}{t} = w(t), \quad (14)$$

которое для соответствующих функций распределения V и W выглядит как

$$V(x) = 1 - l \frac{d}{dx} W(x).$$

Заметим, что если $u(t) \equiv 0$, W экспоненциальна, то V экспоненциальна с тем же средним, что согласуется с результатом теоремы.

Институт математики и механики
Академии наук АрмССР
Ереван

Поступило
23 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ K. Matthes, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., 66, 66 (1963). ² Р. Е. Майлес, Изв. АН АрмССР, Математика, 5, № 3, 263 (1970). ³ Р. В. Амбарцумян, Изв. АН АрмССР, Математика, 5, № 3, 167 (1970). ⁴ W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie. Chelsea, N. Y., 1949. ⁵ Р. В. Амбарцумян, Теория вероятностей и ее прим. (в печати).