

В. А. БЕРНШТЕЙН

О ГРАНИЧНЫХ ЭФФЕКТАХ В ДЛИННЫХ ВОЛНАХ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БАССЕЙНЕ С ДОННОЙ СТУПЕНЬЮ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 5 III 1971)

Пусть идеальная несжимаемая жидкость в плоском равномерном вращающемся бассейне, разделенном вдоль прямой $x = 0$ на две части разной глубины h , в момент времени $t = 0$ выводится из состояния относительного покоя сосредоточенным в точке $(x_0, 0)$ возмущением. Согласно линейной теории длинных волн, возмущение при $t > 0$ описывается в безразмерных переменных уравнениями

$$\begin{aligned} \partial v_x / \partial t - k v_y &= -\partial \zeta / \partial x; \quad \partial v_y / \partial t + k v_x = -\partial \zeta / \partial y; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad h = \begin{cases} h_1, & x < 0, \\ h_2, & x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v_x и v_y — компоненты скорости по осям прямоугольной системы координат (x, y) в горизонтальной плоскости, ζ — возвышение свободной поверхности, k — параметр Кориолиса. На линии скачка глубины выполняются условия

$$[\zeta] = 0, \quad [h v_x] = 0, \quad x = 0. \quad (2)$$

Начальное возмущение зададим в виде
 $(\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y)|_{t=0} = \delta(x_0, 0), \quad x_0 < 0; \quad (\partial v_x / \partial y - \partial v_y / \partial x)|_{t=0} = 0;$

$$\zeta|_{t=0} = 0; \quad (3)$$

δ обозначает дельта-функцию Дирака. Применяя к (1), (2) при учете (3) преобразование Лапласа по t с параметром p и преобразование Фурье по y с параметром λ , легко найти изображение решения. Переходя к оригиналам, можно представить, например, ζ в виде

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3, \quad x < 0; \quad \zeta = \zeta_4 + \zeta_5, \quad x > 0; \\ \zeta_j &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty-i\infty}^{+\infty+i\infty} e^{pt} dp \int_{-\infty}^{+\infty} Z_j \exp(i\lambda y - x_{j1} r_1 - x_{j2} r_2) d\lambda, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5; \\ Z_1 &= \frac{1}{2r_1}, \quad Z_2 = \frac{h_1 r_1 - h_2 r_2}{h_1 r_1 + h_2 r_2} Z_1, \quad Z_3 = Z_5 = \frac{k\alpha}{p - k\alpha} Z_4, \quad Z_4 = Z_1 + Z_2; \quad (4) \\ \alpha &= (h_1 - h_2) i \lambda / (h_1 r_1 + h_2 r_2); \quad r_l = \sqrt{\kappa^2 / h_l + \lambda^2}, \quad \text{Re } r_l \geq 0, \quad l = 1, 2; \\ \kappa^2 &= p^2 + k^2; \\ x_{11} &= |x - x_0|, \quad x_{12} = x_{22} = x_{32} = 0, \quad x_{21} = x_{31} = -x - x_0, \\ x_{41} &= x_{51} = -x_0, \quad x_{42} = x_{52} = x. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ представляют падающую от источника, отраженную и преломленную на линии $x = 0$ волны соответственно. Величины $\zeta_{4,5}$, исчезающие при $k = 0$ и $h_1 = h_2$, представляют граничные эффекты, объясняемые одновременно вращением бассейна и наличием донной ступени. Изучим их поведение при $t \rightarrow \infty$.

Введем в (4) вместо λ новую переменную $\xi = -i\lambda\kappa^{-1} \operatorname{sgn} y$, фиксируя $\operatorname{Re} \kappa \geq 0$ и полагая $r_l = \kappa r_l$, $l = 1, 2$. Если выбрать $\sigma \geq kQ$, $Q = \max(\sqrt{h_1/h_2}, \sqrt{h_2/h_1})$, то интегрирование по ξ во всех ξ , включая $\xi_{3,5}$, можно беспрятственно перенести на контуры Γ_j , определяемые условиями

$$\operatorname{Im}(|y|\xi + x_{j1}\rho_1 + x_{j2}\rho_2) = 0. \quad (5)$$

Пределав это, изменим порядок интегрирования по p и ξ на обратный и заменим p на переменную $u = (pt - \kappa\theta) / \sqrt{t^2 - \theta^2}$, $\theta = \operatorname{Re}(|y|\xi + x_{j1}\rho_1 + x_{j2}\rho_2)$ при условии $\operatorname{Re} \sqrt{u^2 + 1} \geq 0$. Простому полюсу в точке $\kappa a(\xi)$ плоскости p отвечают два простых полюса в точках $u_{\pm} = (ta \operatorname{sgn} y \mp \theta \sqrt{a^2 + 1}) / \sqrt{t^2 - \theta^2}$ плоскости u , поэтому $\xi_{3,5}$ можно представить в виде $\xi_{3,5} = \xi_+ + \xi_-$, где подынтегральная функция в ξ_+ (ξ_-) имеет лишь один простой полюс в точке u_+ (u_-). Переведем интегрирование по u на берега разрезов вдоль лучей

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u + (\operatorname{Re} u - 1) \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \xi &= 0 \quad (|\operatorname{Im} u_{\pm}| \leq 1); \\ \operatorname{Im} u + (\operatorname{Re} u + 1) \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \xi & \quad (|\operatorname{Im} u_{\pm}| > 1); \operatorname{Re} u < 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\operatorname{Re} \sqrt{u_{\pm}^2 + 1} \geq 0$, получим

$$\xi = \xi_+ + \xi_-, \quad \hat{\xi} = \hat{\xi}_+ + \hat{\xi}_-, \quad \hat{\xi}_+ = \xi_{1+}, \quad \hat{\xi}_- = \xi_{2-}, \quad (6)$$

$$\xi_{l\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{l\pm}} \frac{\kappa a h_1}{h_{1\rho_1} + h_{2\rho_2}} \exp[k(ta \mp \theta \sqrt{a^2 + 1})] d\xi, \quad l = 1, 2, \quad (7)$$

где ξ — сумма некоторых контурных интегралов в плоскости ξ от интегралов по разрезам в плоскости u , а $\hat{\xi}_{\pm}$ — от вычетов подынтегральной функции, причем $\Gamma_{l\pm}(\xi_{\pm})$ определяется условием $|\operatorname{Im} u_{\pm}| \leq 1$ ($|\operatorname{Im} u_{\pm}| > 1$), а следовательно, границы между $\Gamma_{1\pm}$ и $\Gamma_{2\pm}$ — уравнением

$$\operatorname{Im} u_{\pm} = \varepsilon \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \xi, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}[y(h_1 - h_2)]. \quad (8)$$

Возмущения типа ξ исследованы в (1). Рассмотрим $\xi_{l\pm}$. Заменим в (7) ξ на новую переменную

$$\mu = \frac{1}{q} \sqrt{1 - \sqrt{(1 - q^4)/(a^2 + 1)}}, \quad q = \sqrt{|h_1 - h_2|} / (h_1 + h_2).$$

При этом плоскость ξ отображается на круг $|\mu| = 1$ с разрезами от точек ветвления функции $R(\mu) = \sqrt{2q^{-2}\mu^2 - \mu^4 - 1}$. Далее,

$$\xi_{l\pm} = \frac{\kappa \varepsilon q^2 h_1}{h_1 + h_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{l\pm}} f(\mu) \exp[ktU_{\varepsilon\pm}(\mu)] d\mu; \quad (9)$$

$$f(\mu) = \frac{1 - \mu^4}{\mu(1 - q^2\mu^2)^2}, \quad U_{\varepsilon\pm}(\mu) = \frac{q}{1 - q^2\mu^2} \left[(qe \mp \frac{y'}{\mu}) R(\mu) \mp \frac{1}{t} \left(\frac{x'_1}{\mu} - x'_{2\mu} \right) \right]; \quad (10)$$

$$x'_1 = \frac{x_{j1} + x_{j2}}{\sqrt{h_1 + h_2}}, \quad x'_2 = \frac{x_{j1} + x_{j2}}{\sqrt{h_1 + h_2}} \operatorname{sgn}(h_1 - h_2), \quad y' = \frac{|y|}{\sqrt{h_1 + h_2}}.$$

Здесь $\gamma_{l\pm}$ — образ $\Gamma_{l\pm}$ в плоскости μ . Из принципа симметрии Шварца в применении к (9) с учетом (10) следует, что можно ограничиться рассмотрением $\xi_{l\pm}'$, где $\gamma_{l\pm}'$ — половина $\gamma_{l\pm}$, расположенная при $\operatorname{Im} \mu \geq 0$, и фиксируя точку контура $\gamma_{l\pm}'$ на оси $\operatorname{Im} \mu = 0$. Пользуясь этим, выделим однозначную ветвь $R(\mu)$, проведя разрезы вдоль сегментов $[\pm\mu_{\mp}, \pm\mu_{\pm}]$, $\mu_{\pm} = \mu_{\mp}^{-1} = q^{-1}\sqrt{1 - \sqrt{1 - q^4}}$. Исследуем $\xi_{l\pm}'$ методом перевала. Уравнение точек перевала можно привести к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{2q\mu}{q^2\mu^2 - 1} \right)^3 &= \varepsilon d(\mu), \quad d(\mu) = \pm \frac{4}{t} \left[\frac{q^4(q^2\mu^6 - 3\mu^4 + 3q^2\mu^2 - 1)y'}{(q^2\mu^2 - 1)^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(3q^2\mu^2 - 1)x'_1 - \mu^2(q^2\mu^2 + 1)x'_2}{(q^2\mu^2 - 1)^3} R(\mu) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, что при $t \rightarrow \infty$ точки перевала стремятся к $\mu = 0$ или $\mu = \infty$. Заменив в (11) $d(\mu)$ на $d(0)$ и $d(\infty)$, получим приближенные решения (10) в виде

$$\mu_{mn} = \frac{(-1)^m}{q} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + d_{mn}^2}}{d_{mn}} \right)^{2m-3}$$

$$d_{mn} = \left[\left(\frac{2q^{4-2m}}{1+q^2} \right)^2 \frac{Q^2 R_m}{t} \right]^{1/2} \exp \frac{i}{3} \left(-\arctg \frac{x'_m}{y'} + \frac{4n + \varepsilon + 1}{2} \pi \right), \quad (12)$$

$$R_m = \sqrt{x_m'^2 + y'^2} \quad (m = 1, 2; \quad n = 0, 1, 2).$$

Легко проверить, что $\mu_{1n} \rightarrow 0$, $\mu_{2n} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Величины μ_{mn} оказываются хорошими приближениями для точек перевала и в случае $Q \rightarrow \infty$, так как отброшенные части $d(\mu)$ порядка $R_m/t \ll 1$.

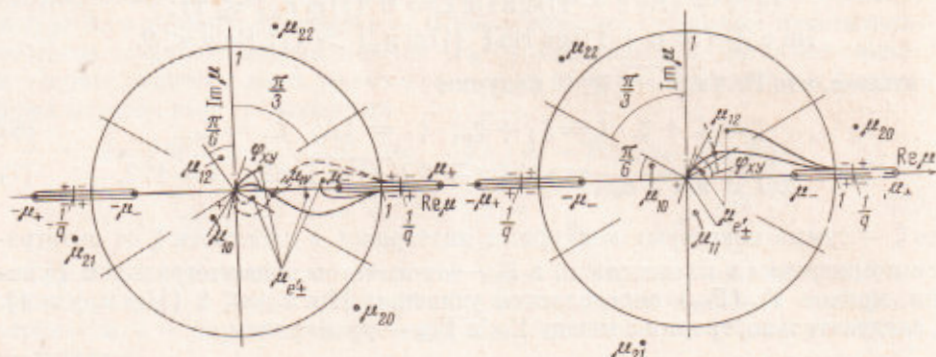


Рис. 1. Схема расположения точек перевала и контуров интегрирования вдоль линий $\text{Im } U_{\pm}(\mu) = \text{const}$, при $\varepsilon = 1$ (слева), при $\varepsilon = -1$. Штриховые линии — контуры для $\xi_{\pm}$, $\varphi_{xy} = \arctg y' / x_{\pm}'$

Изучение рельефа функции $\text{Im } U_{\pm}(\mu)$ показывает, что при $t \rightarrow \infty$ можно перенести интегрирование в (9) на линии $\text{Im } U_{\pm}(\mu) = \text{const}$, среди которых содержится путь наискорейшего спуска через седловую точку с $2n = 3 - \varepsilon$ (рис. 1). Асимптотика $\xi_{\pm}'$ определяется значением $U_{\pm}(\mu)$ либо в фиксированной концевой точке $\mu_{\pm}'$ контура $\gamma_{\pm}'$, либо в точке перевала μ_{1n} в зависимости от положения $\mu_{\pm}'$ относительно «линии наискорейшего подъема», проходящей через μ_{1n} , и знака $\text{Re } [U_{\pm}(\mu_{\pm}') - U_{\pm}(\mu_{1n})]$. Рассмотрим два случая.

1. Q конечно. Решая совместно (5) и (8), получаем при $t \rightarrow \infty$

$$\mu_{1+} \approx \frac{q}{1-q^2} \frac{x_1' + iy'}{t} \sim \frac{q}{1+q^2} \frac{Q^2 R_1}{t}, \quad (13)$$

в то время, как μ_{1-}' , а, следовательно, и ξ_{1-}' , отсутствуют. Из (12) вытекает

$$\mu_{1n} \approx -\frac{d_{1n}}{2q} \sim \left[\frac{q}{2(1+q^2)^2} \frac{QR_1}{t} \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), видим, что асимптотика $\hat{\xi}$ при $t \rightarrow \infty$ определяется значением $U_{\pm}(\mu_{1n})$. Вследствие малости $|\mu_{1n}|$ имеем

$$f(\mu) \approx 1/\mu_{1n}, \quad U_{\varepsilon+} \approx i\varepsilon[q^2 - (1-q^4)\mu_{1n}^2],$$

$$d^2 U_{\varepsilon+}(\mu) / d\mu^2|_{\mu=\mu_{1n}} \approx 6i\varepsilon((1+q^2)/Q)^2,$$

так что, оценивая (9) с учетом (10) по методу перевала и принимая во внимание (6) и отсутствие ξ_{1-} , получаем

$$\xi \sim \frac{2\varepsilon q^2 h_1}{i(h_1 + h_2)} \left(\frac{k}{3\pi R_1} \right)^{1/2} \left[\frac{4QR_1}{(1+q^2)t} \right]^{1/4} \exp \left[-k \left(\frac{1+q^2}{2Q} q R_1 \right)^{2/3} t^{1/3} (\varphi_1 + i\varphi_2) + \right. \\ \left. + i \left(\varepsilon q^2 t + \varphi_3 - \frac{\varepsilon}{4} \pi \right) \right]; \quad (15)$$

$$\varphi_1 = \varepsilon \sin 2\varphi_3, \quad \varphi_2 = \varepsilon \cos 2\varphi_3, \quad \varphi_3 = \frac{1}{3} \left(\arctg \frac{x'_1}{y'} - \frac{1-\varepsilon}{2} \pi \right),$$

Фазовая скорость распространения с возмущения, представленного (15), в предположении $h_1 > h_2$ и $y \gg x_1$

$$c \approx C \sqrt{1 + Q^{-2} c_1} = C \sqrt{Q^2 + 1} c_2, \quad C = {}^{2/3} (1 - 1/Q^2)^{1/3} (Q^2 R_1 / t)^{1/6};$$

где c_1 (c_2) — скорость длинных волн в области $x < 0$ ($x > 0$). Таким образом, $c < c_1$, однако $c > c_2$ при некоторых t и достаточно больших Q .

2. $Q \rightarrow \infty$. Решая совместно (5) и (8), получаем при $Q \rightarrow \infty$

$$\mu_{1+}' \approx 1 - \sqrt{\frac{t}{Q^2 R_1}} \frac{\sqrt{R_1(x'_1 + \varepsilon y')}}{x'_1 + i y'};$$

$$\mu_{1+}' \approx 1 - \sqrt{\frac{t}{Q^2 R_1}} \frac{R_1}{x'_1 + i y'} \sqrt{-\frac{x'_1 + \varepsilon y'}{2 R_1} \pm \sqrt{\left(\frac{x'_1 + \varepsilon y'}{2 R_1} \right)^2 - \frac{x'_1 y' (2 \varepsilon x'_1 + y')}{R_1^2 t}}}. \quad (16)$$

Очевидно, что оба корня μ_{1-}' существуют лишь при $\varepsilon = -1$.

Переходя в (9), (10) и (16) к пределу при $Q \rightarrow \infty$ (т. е. при $q \rightarrow 1$) и учитывая наличие двух фиксированных концов у γ_{1-}' , находим, например, в случае $k R_1 \rightarrow \infty$

$$\xi = \frac{k}{2} H(\varepsilon y' - x'_1) \exp[-k x'_1 + i k(\varepsilon t - y')] + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x'_1 + \varepsilon y'}{(x'_1 + i y')^2} + \right. \\ \left. + O\left(\frac{1}{k R_1^2}\right) \right] \exp[-x'^2/(x' + \varepsilon y') + i(\varepsilon t + 1/2(x'_1 - \varepsilon y'))]; \quad (17)$$

$$x'_1 + \varepsilon y' > 0; \quad H(r) = \begin{cases} 0 & (z < 0), \\ 1 & (z \geq 0). \end{cases}$$

Первое слагаемое в правой части (17) описывает волну Кельвина. При условии (8) она выделяется лишь при $\varepsilon = 1$ и $x'_1 < y'$ (при $x'_1 = 0$ условие (8) становится необходимым). Из (12) и (16) соответственно получаем

$$(|\mu_{m\pi}| - 1)Q \sim (Qt/R_0)^{1/2}, \quad (\mu_{1+}' - 1)Q \sim \sqrt{t/R_0}.$$

Отсюда видно, что μ_{1+}' стремится к единице быстрее, чем $|\mu_{m\pi}|$, вследствие чего асимптотика ξ и определяется в данном случае значением $U_{1+}(\mu_{1+}')$. Возникновение группы волн (15) вызвано дисперсией «двойных кельвиновых волн»⁽²⁾. Дисперсия исчезает при $Q = \infty$, что и приводит к (17).

Сахалинский комплексный
научно-исследовательский институт
Дальневосточного научного центра
Академии наук СССР
Южно-Сахалинск

Поступило
12 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. С. Войт, С. Б. Себекин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 10 (1022). ² M. S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mech., 31, 3, 417 (1968).