Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 2

УДК 517.942.4

МАТЕМАТИКА

Т. М. КАРАСЕВА

О СКОРОСТИ РОСТА И ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 V 1971)

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$y''+p(x)y=0 \quad (-\infty<x<\infty), \tag{1}$$

где $p(x)$ — периодическая функция, абсолютно интегрируемая на любом конечном интервале.

Для того чтобы сформулировать рассматриваемую задачу и полученный результат, введем несколько обозначений.

Пусть T — период функции $p(x)$, γ — ее среднее значение,

$$\gamma=\frac{1}{T}\int_0^T p(x)\,dx.$$

Пусть $q(x)$ — та первообразная функции $p(x)-\gamma$, среднее значение которой равно нулю.

Положим

$$\alpha=T\int_0^T q^2(x)\,dx.$$

Обозначим через $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ два частных решения уравнения (1), определяемых начальными условиями $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=0$; $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$.

Как известно ([1]), матрица

$$Y(x)=\begin{pmatrix}\varphi(x) & \psi(x)\\ \varphi'(x) & \psi'(x)\end{pmatrix}$$

представима в виде произведения положительно определенной матрицы $S(x)$ и матрицы поворота на угол $-\theta(x)$. Угол $\theta(x)$ называют аргументом матрицы $Y(x)$. Он непрерывно зависит от x, а при $x=0$ обращается в нуль. Отнесем к m-й зоне все те уравнения вида (1), для которых выполняется неравенство

$$(m-{}^1\!/_2)\pi\leqslant\theta(T)<(m+{}^1\!/_2)\pi.$$

Сопоставим уравнению (1) пять чисел: период T, числа γ и α, номер зоны m и постоянную Ляпунова

$$A={}^1\!/_2[\varphi(T)+\psi'(T)].$$

Если постоянная Ляпунова по модулю больше единицы, то среди решений уравнения (1) найдутся два решения таких, что при $x\to\infty$ одно из них экспоненциально растет, а другое экспоненциально убывает. Чем больше модуль постоянной Ляпунова, тем быстрее растет первое из этих решений.

Если постоянная Ляпунова по модулю равна единице, то каждое решение уравнения (1) при $x\to\infty$ растет не быстрее, чем линейная функция

x. Если постоянная Ляпунова по модулю меньше единицы, то все решения уравнения (1) ограничены на всей оси.

В последних двух случаях ($|A| \leqslant 1$) будем говорить, что уравнение (1) принадлежит области квазиустойчивости. В первом случае ($|A| > 1$) уравнение (1) принадлежит области неустойчивости.

Все уравнения вида (1) с одинаковыми значениями величин α, T, γ и m объединим в один класс (α, T, γ, m). Верхнюю грань чисел $|A|$, соответствующих всевозможным уравнениям из класса (α, T, γ, m), обозначим через $A(\alpha, T, \gamma, m)$. Нашей целью является отыскание всех классов (α, T, γ, m) таких, что

$$A(\alpha, T, \gamma, m) > 1, \tag{2}$$

и вычисление функции $A(\alpha, T, \gamma, m)$ для этих классов.

Так как число Ляпунова A ($|A| > 1$) характеризует скорость роста решений уравнения (1), то, зная верхнюю грань $A(\alpha, T, \gamma, m)$, можно оценить сверху эту скорость. Если условие (2) не выполнено, то каждое уравнение класса (α, T, γ, m) принадлежит области квазиустойчивости. Будем говорить в этом случае, что класс (α, T, γ, m) принадлежит области квазиустойчивости.

М. Г. Крейн ([2]) показал, что класс (α, T, γ, m) состоит исключительно из уравнений с ограниченными решениями, если $\gamma \geqslant 0$ и $\alpha < 2 - {}^1/_{24}T^4\gamma^2$, или если $\gamma = 0$ и $0 < \alpha < \pi^2/4$.

В работе ([3]) сформулированная выше задача решена в предположении, что $\gamma \geqslant 0$. В дальнейшем автору удалось снять это ограничение. Ниже приводятся полученные результаты для $\gamma < 0$.

При $\gamma < 0$ для выполнения условия (2) необходимо, чтобы номер зоны m был неотрицательным.

Начнем со случая $m = 0$. Условие (2) в этом случае выполняется при любых значениях α и T. Это означает, что ни один класс (α, T, γ, m) не принадлежит области квазиустойчивости при $\gamma < 0$ и $m = 0$. Верхняя грань чисел Ляпунова определяется формулой

$$A(\alpha, T, \gamma, 0) = \operatorname{ch}(T\sqrt{-\gamma}), \quad \gamma < 0. \tag{3}$$

Перейдем к случаю $m = 1, 2, \ldots$ Введем величину r ($1 < r < \infty$) как корень уравнения

$$F(r) \equiv \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-t)(r-t)}{t}}\,dt \Bigg/ \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{(1-t)(r-t)}}\,dt\right)^3 = \frac{m^2\alpha}{T^4\gamma^2}. \tag{4}$$

Функция $F(r)$ ($1 < r < \infty$) монотонно растет с ростом r, причем $F(1) = 0$, $F(\infty) = \infty$. Поэтому уравнение (4) имеет только один корень.

Для выполнения условия (2) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$1 < \omega_1 \equiv T^2|\gamma| \Bigg/ m^2 \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{(1-t)(r-t)}}\,dt\right)^2. \tag{5}$$

При выполнении этого неравенства

$$A(\alpha, T, \gamma, m) = \operatorname{ch}\left\{m\sqrt{(\omega_1 - 1)\left(r - \frac{1}{\omega_1}\right)} \int_1^\infty \sqrt{\frac{t}{(rt-1)(t-1)}}\,\frac{dt}{t - 1/(\omega_1 r)}\right\}. \tag{6}$$

Можно показать, что величина $A(\alpha, T, \gamma, m)$ монотонно возрастает с ростом α при фиксированных T, γ и m.

x. Если постоянная Ляпунова по модулю меньше единицы, то все решения уравнения (1) ограничены на всей оси.

В последних двух случаях ($|A| \leqslant 1$) будем говорить, что уравнение (1) принадлежит области квазиустойчивости. В первом случае ($|A| > 1$) уравнение (1) принадлежит области неустойчивости.

Все уравнения вида (1) с одинаковыми значениями величин α, T, γ и m объединим в один класс (α, T, γ, m). Верхнюю грань чисел $|A|$, соответствующих всевозможным уравнениям из класса (α, T, γ, m), обозначим через $A(\alpha, T, \gamma, m)$. Нашей целью является отыскание всех классов (α, T, γ, m) таких, что

$$A(\alpha, T, \gamma, m) > 1, \tag{2}$$

и вычисление функции $A(\alpha, T, \gamma, m)$ для этих классов.

Так как число Ляпунова A ($|A| > 1$) характеризует скорость роста решений уравнения (1), то, зная верхнюю грань $A(\alpha, T, \gamma, m)$, можно оценить сверху эту скорость. Если условие (2) не выполнено, то каждое уравнение класса (α, T, γ, m) принадлежит области квазиустойчивости. Будем говорить в этом случае, что класс (α, T, γ, m) принадлежит области квазиустойчивости.

М. Г. Крейн ([2]) показал, что класс (α, T, γ, m) состоит исключительно из уравнений с ограниченными решениями, если $\gamma \geqslant 0$ и $\alpha < 2 - {}^1/_{24}T^4\gamma^2$, или если $\gamma = 0$ и $0 < \alpha < \pi^2/4$.

В работе ([3]) сформулированная выше задача решена в предположении, что $\gamma \geqslant 0$. В дальнейшем автору удалось снять это ограничение. Ниже приводятся полученные результаты для $\gamma < 0$.

При $\gamma < 0$ для выполнения условия (2) необходимо, чтобы номер зоны m был неотрицательным.

Начнем со случая $m = 0$. Условие (2) в этом случае выполняется при любых значениях α и T. Это означает, что ни один класс (α, T, γ, m) не принадлежит области квазиустойчивости при $\gamma < 0$ и $m = 0$. Верхняя грань чисел Ляпунова определяется формулой

$$A(\alpha, T, \gamma, 0) = \operatorname{ch}(T\sqrt{-\gamma}), \quad \gamma < 0. \tag{3}$$

Перейдем к случаю $m = 1, 2, \ldots$ Введем величину r $(1 < r < \infty)$ как корень уравнения

$$F(r) \equiv \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-t)(r-t)}{t}}\,dt \Bigg/ \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{(1-t)(r-t)}}\,dt\right)^3 = \frac{m^2\alpha}{T^4\gamma^2}. \tag{4}$$

Функция $F(r)$ $(1 < r < \infty)$ монотонно растет с ростом r, причем $F(1) = 0$, $F(\infty) = \infty$. Поэтому уравнение (4) имеет только один корень.

Для выполнения условия (2) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$1 < \omega_1 \equiv T^2|\gamma| \Bigg/ m^2 \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{(1-t)(r-t)}}\,dt\right)^2. \tag{5}$$

При выполнении этого неравенства

$$A(\alpha, T, \gamma, m) = \operatorname{ch}\left\{m\sqrt{(\omega_1 - 1)\left(r - \frac{1}{\omega_1}\right)} \int_1^\infty \sqrt{\frac{t}{(rt-1)(t-1)}}\,\frac{dt}{t - 1/(\omega_1 r)}\right\}. \tag{6}$$

Можно показать, что величина $A(\alpha, T, \gamma, m)$ монотонно возрастает с ростом α при фиксированных T, γ и m.

Если выполняется неравенство

$$\frac{T\sqrt{-\gamma}}{m}-\int_0^1\sqrt{\frac{t}{(1-t)(r-t)}}\,dt\leqslant 0, \tag{7}$$

противоположное неравенству (5), то класс (α, T, γ, m) принадлежит области квазиустойчивости. Параметр r, входящий в это неравенство, определяется соотношением (4). Левая часть неравенства (7) является функцией параметров $\sqrt{\alpha}/m$ и $T\sqrt{\gamma}/m$. Поэтому удобно сопоставить каждому классу (α, T, γ, m) точку плоскости с координатами ($T\sqrt{-\gamma}/m$, $\sqrt{\alpha}/m$). Все точки этой плоскости, соответствующие тем классам (α, T, γ, m), которые принадлежат области квазиустойчивости, заполняют некоторую область G, заштрихованную на рис. 1.

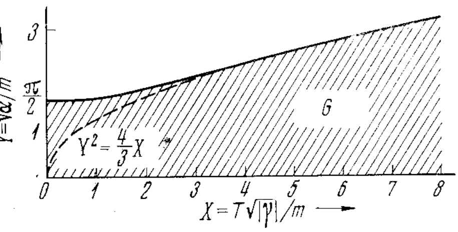

Рис. 1

Автор пользуется случаем выразить признательность М. Г. Крейну за постоянный интерес к работе; автор выражает благодарность Е. Е. Коробовой за проделанную вычислительную работу.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
6 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский, Успехи математических наук, **10**, в. 1, (63), 3 (1955). [2] М. Г. Крейн, Прикладная математика и механика, **19**, в. 6, 641 (1955). [3] Т. М. Карасева, Изв. АН СССР, сер. матем., **29**, в. 1, 41 (1965).