

И. П. КОРНФЕЛЬД

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ МИНИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 VI 1971)

Известно, что всякая динамическая система на метрическом компакте имеет хотя бы одну инвариантную борелевскую вероятностную меру. Вообще говоря, таких мер может быть бесконечно много, но в ряде случаев (топологические цепи Маркова, автоморфизмы компактных групп, транзитивные Y -диффеоморфизмы) из всех инвариантных мер можно выделить единственную меру μ требованием максимальности энтропии: метрическая энтропия динамической системы по мере μ должна равняться топологической энтропии.

Естественно узнать, имеет ли место такая закономерность для любых динамических систем на минимальных множествах (минимальность является крайним требованием, исключающим тривиальные контрпримеры, которые используют отсутствие транзитивности). Если топологическая энтропия динамической системы равна нулю, то и метрическая по любой инвариантной мере — тоже, и из факта существования минимальных не строго эргодических систем с нулевой энтропией следует отрицательный ответ на заданный вопрос в случае, когда топологическая энтропия динамической системы равна нулю. М. С. Штильман ⁽¹⁾ построил топологически транзитивную, но не минимальную систему с положительной энтропией, топологическая энтропия которой реализуется на различных инвариантных мерах.

Мы приведем пример неединственности меры с максимальной энтропией для минимальной динамической системы, топологическая энтропия которой положительна.

Динамической системой (с дискретным временем) мы будем называть пару (X, T) , где X — компактное метрическое пространство, а T — его гомеоморфизм.

Орбита точки $x \in X$ — это множество $O(x) = \{T^n x\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замкнутое множество $F \subset X$ называется минимальным относительно системы (X, T) , если оно не содержит собственных замкнутых инвариантных подмножеств. Другими словами, минимальность F означает, что $\overline{O(x)} = F$ для всех $x \in F$.

Если X минимально относительно (X, T) , то саму систему будем называть минимальной.

Система (X, T) называется дистальной, если для любой пары точек, $x, y \in X$, $x \neq y$, выполнено неравенство

$$\inf_{n \in \mathbb{Z}} \rho(T^n x, T^n y) > 0,$$

где ρ — метрика на X .

Динамическая система (X, T) называется эргодической (в топологическом смысле), если для любой пары непустых открытых множеств $G_1, G_2 \subset X$ найдется такое $N \in \mathbb{Z}$, что $T^N G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Динамическая система называется слабо перемешивающей (в топологическом смысле), если ее декартов квадрат — система $(X \times X, T \times T)$ — эргодична.

Динамическая система называется строго эргодической, если она обладает единственной инвариантной борелевской вероятностной мерой.

Пусть даны две динамические системы (X, T) и (Y, Q) . Рассмотрим систему $(X \times Y, T \times Q)$ и естественные проекции $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ и $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$, определенные формулами $\pi_X(x, y) = x$, $\pi_Y(x, y) = y$. Системы (X, T) и (Y, Q) называются топологически независимыми, если единственным замкнутым множеством $\Delta \subset X \times Y$, инвариантным относительно $T \times Q$ и таким, что $\pi_X \Delta = X$ и $\pi_Y \Delta = Y$, является $\Delta = X \times Y$.

Лемма 1. Пусть (X, T) — строго эргодическая динамическая система и μ — инвариантная мера. Для того чтобы система (X, T) была минимальна, необходимо и достаточно, чтобы для любого непустого открытого множества $G \subset X$ $\mu G > 0$.

Доказательство *. 1) Пусть X минимально, G открыто непусто и $\mu G = 0$. Функция $f(x) = \rho(x, X \setminus G)$ непрерывна на X . Поскольку $f(x) = 0$ почти всюду по мере μ , а мера μ эргодична, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x)] = \int_X f(x) d\mu = 0 \quad (1)$$

почти всюду. С другой стороны, можно выбрать $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$ так, что $\{x: \rho(x, x_0) < \varepsilon\} \subset G$. Если $A = \{x: \rho(x, x_0) < \varepsilon/2\}$, то при $x \in A$

$$f(x) \geq \varepsilon/2. \quad (2)$$

Возьмем теперь любую точку $x \in X$. Из минимальности X вытекает, что моменты попадания траектории точки x в A образуют относительно плотное множество, т. е. найдется натуральное N такое, что на любом отрезке траектории точки x длины $\geq N$ будет хотя бы одна точка из A .

В таком случае при любом натуральном k , используя (2), получаем

$$s_{kN}(x) = \frac{1}{kN} [f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{kN-1}x)] \geq \frac{\varepsilon k}{2kN} = \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Ввиду произвольности k

$$\overline{\lim} s_n(x) \geq \varepsilon/(2N),$$

что противоречит (1).

2) Пусть для любого непустого открытого G $\mu G > 0$, но X не минимально. Найдется $x_0 \in X$ и непустое открытое $G \subset X$ такое, что $O(x_0) \cap G = \emptyset$. Пусть $f(x) = \rho(x, X \setminus G)$. Легко видеть, что $\int_X f(x) d\mu > 0$. Но $s_n(x_0) = 0$, что противоречит строгой эргодичности (X, T) .

Лемма 2. Существует динамическая система (X, T) , обладающая свойствами:

а) $h(T) > 0$ (h — топологическая энтропия),

б) (X, T) — строго эргодическая, слабо перемешивающая и минимальная.

Доказательство. По теореме Джунтты ⁽¹⁾ для любой динамической системы в метрическом смысле, порожденной слабо перемешивающим автоморфизмом пространства Лебега, существует метрически изоморфная ей строго эргодическая динамическая система на канторовом множестве.

Пусть (Y, S, ν) — любая слабо перемешивающая (метрическая) система с положительной энтропией, например, любая схема Бернулли. Пусть (K, Q) — изоморфная ей строго эргодическая система на канторовом мно-

* В дальнейшем будет использоваться только достаточность условия.

жестве, а μ — инвариантная относительно Q вероятностная мера. Носитель X меры μ является замкнутым инвариантным множеством меры 1. Если T — ограничение Q на X , то система (X, T) удовлетворяет всем требованиям леммы.

Положительность $h(T)$ является следствием того, что $h_\nu(S) > 0$.

Для доказательства того, что (X, T) — топологически слабо перемешивающая, нужно для пары открытых множеств $G_1, G_2 \subset X \times X$ найти $N \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$V^N G_1 \cap G_2 \neq \emptyset, \quad (3)$$

где $V = T \times T$. Но $X \times X$ — носитель меры $\mu \times \mu$, а метрическая система $(X \times X, V, \mu \times \mu)$ эргодична. Отсюда следует (3). Применяя лемму 1 (достаточность), получаем, что система (X, T) минимальна.

Докажем, что (X, T) строго эргодична. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на X и $\varphi(x)$ — любое ее непрерывное продолжение на K . Так как (K, Q) строго эргодична, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\varphi(x) + \varphi(Qx) + \dots + \varphi(Q^{n-1}x)] = \int_K \varphi(x) d\mu.$$

Но

$$\int_K \varphi(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu,$$

значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x; f) = \int_X f(x) d\mu,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. *Существует минимальная динамическая система (X, T) с $h(T) > 0$, обладающая по крайней мере двумя различными инвариантными борелевскими вероятностными мерами μ_1 и μ_2 , причем*

$$h_{\mu_1}(T) = h_{\mu_2}(T) = h(T),$$

где $h_{\mu_i}(T)$ — метрическая энтропия по мере μ_i ($i = 1, 2$).

Доказательство. Пусть (Y_1, Q) — система, построенная в лемме 2 (обозначенная там (X, T)).

Как известно ⁽²⁾, существует минимальная, но не строго эргодическая система (Y_2, R) , где Y_2 — двумерный тор, а R — его гомеоморфизм, который в циклических координатах (y_1, y_2) записывается в виде

$$R(y_1, y_2) = (e^{i\alpha} y_1, \psi(y_1) y_2). \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что системы вида (4) дистальны и, значит, имеют нулевую топологическую энтропию.

Положим $(X, T) = (Y_1 \times Y_2, Q \times R)$. Так как (Y_1, Q) слабо перемешивающая, а (Y_2, R) дистальна, то по теореме Фюрстенберга ⁽³⁾ эти системы топологически независимы, а так как обе они минимальны, то их топологическая независимость означает минимальность их декартова произведения (X, T) .

Далее, $h(T) = h(Q) \pm h(R) > 0$.

Пусть μ' и μ'' — две различные инвариантные вероятностные меры для (Y_2, R) . Так как $h(R) = 0$, то $h_{\mu'}(R) = h_{\mu''}(R) = 0$.

По теореме Динабургса ⁽⁵⁾ $h(Q) = \sup_\nu h_\nu(Q)$, где верхняя грань берется по всем инвариантным борелевским вероятностным мерам ν . Но Q обладает единственной такой мерой μ , поэтому $h(Q) = h_\mu(Q)$.

Пусть $\mu_1 = \mu \times \mu'$, $\mu_2 = \mu \times \mu''$. Легко видеть, что μ_1 и μ_2 инвариантны относительно T , $\mu_1 \neq \mu_2$ и $h_{\mu_1}(T) = h_{\mu_2}(T) = h(T)$.

З а м е ч а н и е. Заменяя в доказательстве системы (Y_1, Q) и (Y_2, R) на системы с непрерывным временем, обладающие теми же свойствами (см. $(^4, ^6)$), получим пример неединственности меры с максимальной энтропией для минимального потока.

Автор выражает благодарность Б. М. Гуревичу за задачу, решенную в этой заметке, и полезные обсуждения, а также В. И. Оселедцу за совет по изложению доказательства.

Государственный всесоюзный центральный
научно-исследовательский институт
комплексной автоматизации
Москва

Поступило
10 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. Jewett, J. Math. and Mech., 19, № 8 (1970). ² H. Furstenberg, Am. J. Math., 83, № 4 (1961). ³ H. Furstenberg, Math. Syst. Theory, 1, № 1 (1967).
⁴ K. Jacobs, Lipschitz Functions and the Prevalence of Strict Ergodicity for Continuous — Time Flows, Preprint, Erlangen, 1970. ⁵ Е. И. Динабург, ДАН, 190, № 1 (1970). ⁶ М. И. Грабарь, ДАН, 95, № 1 (1954). ⁷ М. С. Штильман, Матем. заметки, 9, № 3 (1971).