Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 2

УДК 51 : 330.115

МАТЕМАТИКА

В. Л. МАКАРОВ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОПТИМАЛЬНОСТЬЮ И РАВНОВЕСИЕМ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ВРЕМЕННОГО ИНТЕРВАЛА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 31 V 1971)

Хорошо известна ([1-3]) связь между решением задачи выпуклого программирования и состоянием равновесия модели конкурентной экономики Эрроу — Дебре. Эта связь является важным фактом для экономической теории. В настоящей работе данный факт при некоторых условиях распространяется на модели экономической динамики. Аналогом решения задачи выпуклого программирования при этом является оптимальная (бесконечная) траектория, а аналогом состояния равновесия модели конкурентной экономики — соответственно равновесная траектория. Понятие равновесия в динамической экономике может определяться поразному. Здесь рассматриваются два существенно различных определения и устанавливается связь между ними.

1°. Достаточно общая модель экономической динамики задается с помощью множества «производственных» возможностей Z и набора функций (полезности или предпочтения потребителей) $u = (u_1, \ldots, u_l)$. Обычные предположения о модели (Z, u) таковы: a) $Z \subset R_-^n \times R^m \times R_+^n$, где R_-^n (соответственно R_+^n) неположительный (неотрицательный) ортант эвклидова пространства R^n; Z — выпуклый замкнутый конус. Произвольный элемент конуса Z будем обозначать через $(-x, v, y)$, где $x, y \in R_+^n$, $v \in R^m$; если $(-x, v, y) \in Z$ и $(-x, v, y) \geqslant 0$, то $(-x, v, y) = 0$. Существует $(-x, v, y) \in Z$ такой, что $y > 0$; $\mathrm{Pr}_x Z = R_-^n$, где $\mathrm{Pr}_x\ldots$ — проекция на первые n координат. b) u_k: $R_+^m \to R_+$, $k = 1, \ldots, l$, u_k непрерывна, вогнута, $\sup\limits_{\min_i c_i \to \infty} u_k(c) = \infty$.

В теории моделей экономической динамики изучаются траектории движения экономической системы во времени. В модели (Z, u) траектория представляет последовательность $z = (x_t, c_t^{(1)}, \ldots, c_t^{(l)})_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям $x_t \in R_+^n$, $c_t^{(k)} \in R_+^m$, $t = 0, 1, \ldots$, $k = 1, \ldots, l$; $\left(-x_t, \sum\limits_{k=1}^{l} c_t^{(k)}, x_{t+1}\right) \in Z$ для всех t.

Множество всех траекторий, начинающихся с состояний x_0, обозначим через $X(x_0)$.

2°. Оптимальность траекторий определяется с помощью функций u и последовательности $\lambda = (\lambda_t^{(1)}, \ldots, \lambda_t^{(l)})_{t=0}^{\infty}$ коэффициентов соизмерения полезности различных потребителей в различные моменты времени. Пусть для траектории z $\gamma_t = \sum\limits_{\tau=0}^{t} \sum\limits_{k} \lambda_\tau^{(k)} u(c_\tau^{(k)})$. Траектория $\bar{z}$ называется (u, λ)-*оптимальной*, если $\varliminf\limits_{t\to\infty} (\bar{\gamma}_t - \gamma_t) \geqslant 0$ для любой траектории $z \in X(x_0)$ ($\bar{\gamma}_t$ соответствует траектории $\bar{z}$). В настоящей работе рассматриваются лишь такие последовательности λ, при которых $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma_t < \infty$ для любой траектории $z \in X(x_0)$. Множество таких последовательностей λ обозначим через $\Lambda(x_0)$.

3°. Равновесные траектории. Обозначим через P последовательность $(p_t)_{t=0}^{\infty}$, $p_t \in R_+{}^m$, $p_t \neq 0$, а через θ — последовательность $(\theta_t)_{t=0}^{\infty}$, $\theta_t \in R_+^l$, $\sum_{t=0}^{\infty} \sum_k \theta_t^{(k)} \leqslant 1$, и пусть Θ — множество всех таких последовательностей θ.

Пусть далее $p(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_k c_t^{(k)} p_t^{(k)}$. Если оптимальность траектории определялась в зависимости от последовательности λ, то равновесная траектория определяется с помощью $\theta \in \Theta$.

Траектория $\bar{z} \in X(x_0)$ называется **равновесной**, если найдется такая последовательность (цен) P, что

$$p(\bar{z}) = \max_{z \in X(x_0)} p(z), \tag{1}$$

$$u_k(\bar{c}_t^{(k)}) = \max_{cp_t \leqslant p(\bar{z}) \cdot \theta_t^{(k)}} u_k(c) \quad \text{для всех } t. \tag{2}$$

Теорема 1 (существования). *Равновесная траектория существует для любой $\theta \in \Theta$ и любого начального состояния $x_0 \neq 0$.*

Доказательство основано на приближении искомого состояния равновесия с помощью состояний равновесия последовательности моделей Эрроу — Дебре ([1]) для конечных отрезков времени и обоснования предельного перехода.

Теорема 2 (эквивалентности). *Пусть $x_0 > 0$. Тогда для любой равновесной траектории $\bar{z}$, определенной последовательностью $\theta \in \Theta$, для которой $\sum_t \sum_k \theta_t^{(k)} = 1$, найдется $\lambda \in \Lambda(x_0)$ такая, что $\bar{z}$ является (u, λ)-оптимальной. Наоборот, для любой (u, λ)-оптимальной $(\lambda \in \Lambda(x_0))$ траектории $\bar{z}$ найдется $\theta \in \Theta$ такая, что $\bar{z}$ оказывается равновесной траекторией относительно этой последовательности θ.*

4°. Понятие равновесной траектории основано на недостаточно реальном экономически предположении, что производственный сектор стремится к максимизации прибыли за все бесконечное будущее. Понятие локально-равновесной траектории возникает при принятии гипотезы о максимизации производственным сектором лишь текущей прибыли.

Для произвольного момента времени t, состояния $x_t \in R_+{}^n$, вектора $\pi \in R_+{}^n$, $\sum_i \pi^{(i)} = 1$, и последовательности $\theta \in \Theta$ определим модель конкурентного равновесия Эрроу — Дебре ([1-3]) следующим образом. В модели имеется один производитель и $l+1$ потребитель. Множество производственных возможностей производителя $X = \{x \in R^{m+n} \mid x = (v, y), (-x_t, v, y) \in Z\}$, функции полезности потребителей $f_k(x) = u_k(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$ при $k = 1, \ldots, l$, $f_{l+1}(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{(m+i)} \pi^{(i)}$; матрица (здесь вектор) распределения прибылей есть

$$\left(\frac{\theta_t^{(1)}}{1 - \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_k \theta_\tau^{(k)}}, \ldots, \frac{\theta_t^{(l)}}{1 - \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_k \theta_\tau^{(k)}}, \frac{\sum_{\tau=t+1}^{\infty} \sum_k \theta_\tau^{(k)}}{1 - \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_k \theta_\tau^{(k)}} \right).$$

Обозначим состояние равновесия описанной модели Эрроу — Дебре через $w(\pi)$ и значение функции f_{l+1} в этом состоянии равновесия через f_{l+1}^{π}. Определим $\bar{\pi}$ из условия $\bar{f}_{l+1}^{\pi} = \max_{\pi \geqslant 0, \sum \pi_i = 1} f_{l+1}^{\pi}$. Состояние равновесия

$w(\bar{\pi}) = (v(\bar{\pi}),\ y(\bar{\pi}),\ c^{(1)}(\bar{\pi}), \ldots, c^{(l)}(\bar{\pi}),\ p(\bar{\pi}))$ определяет для данного состояния x_t векторы $c_t^{(1)}, \ldots, c_t^{(l)}, x_{t+1}$, где $c_t^{(k)} = c^{(k)}(\bar{\pi})$, $k = 1, \ldots, l$, $x_{t+1} = y(\bar{\pi})$.

Траектория $\bar{z} \in X(x_0)$ называется локально-равновесной, если для каждого t она определяется согласно выше описанной процедуре.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 локально-равновесная траектория существует.*

Предположим для определенности, что множество $X(x_0)$ лежит в пространстве s числовых последовательностей с топологией покоординатной сходимости. Нетрудно показать, что $X(x_0)$ есть выпуклый компакт в s. Пусть X — произвольный выпуклый компакт, содержащийся в $X(x_0)$. Пусть $z(X)$ — равновесная траектория, определяемая соотношениями (1) и (2), только в соотношении (1) max берется не по $X(x_0)$, а по X. Будем говорить, что в модели (Z, u, θ) отсутствует ситуация монопольности, если $p(z(X(x_0))) \geqslant p(z(X))$ для любого $X \subseteq X(x_0)$.

Теорема 4. *В модели (Z, u, θ), удовлетворяющей условиям теоремы 2, в которой отсутствует ситуация монопольности, всякая равновесная траектория является локально-равновесной.*

5°. Для экономических приложений и численных расчетов интерес представляют стационарные (u, λ)-оптимальные траектории или магистрали. Траектория z стационарна, если $x_t, c_t^{(1)}, \ldots, c_t^{(l)}) = (x, c^{(1)}, \ldots, c^{(l)})\alpha^t$, где α — положительное число.

Теорема 5. *Пусть для модели (Z, u, λ) выполнены следующие условия: 1) существует индекс i такой, что $x_t^{(i)} = x_{t+1}^{(i)}$ для любой траектории $z \in X(x_0)$ и любого x_0; 2) множество $\{x \in R_+^n \mid (-x, v, y) \in Z, v \geqslant 0, y \geqslant x, x^{(i)} = x_0^{(i)}\}$ ограничено; 3) $l = 1$, $u(c) = 0$, если $c^{(j)} = 0$ хотя бы для одного j; 4) $\lambda = (\mu^{-t})_{t=0}^{\infty}$, $1 < \mu < \nu_0$, где $\nu_0 = \max \nu$ при условиях $\gamma x_j \leqslant y_j$, $j = 1, \ldots, n$, $j \neq i$, $(-x, c, y) \in Z$, $c \geqslant 0$, $x^{(i)} = x_0^{(i)}$.*

Тогда магистраль существует. Обозначим эту магистраль через $(\bar{x}, \bar{c})$.

Теорема 6. *Последовательность $\theta \in \Theta$, соответствующая согласно теореме 2 последовательности $\lambda = (\mu^{-t})_{t=0}^{\infty}$, для магистрали $(\bar{x}, \bar{c})$ имеет вид $\theta = \left\{\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^{t-1} \cdot \frac{1}{\delta}\right\}_{t=1}^{\infty}$, где δ — число, большее единицы и зависящее от μ.*

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
14 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Debreu, The Theory of Value. Cowles Foundation, Monograph 17, 1959. [2] С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., 1964. [3] В. Л. Макаров, Кибернетика, № 5, 136 (1969).