

Ю. Ф. БОРИСОВ, С. З. ШЕФЕЛЬ

ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕШНЕЙ И ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 24 III 1971)

1°. Под «положительностью гауссовой кривизны поверхности F » понимается следующее условие: если $X \in F$ — произвольная точка, $\{G_n\}$ — произвольная последовательность областей $G_n \in F$, $X \in G_n$, стягивающихся к точке X , $\omega(G_n)$, $\sigma(G_n)$ — соответственно кривизна (внутренняя) и площадь G_n в смысле теории многообразий ограниченной кривизны (см. (1)), то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(G_n)}{\sigma(G_n)} > 0$ (когда внутренняя метрика F C^2 — риманова, это условие равносильно положительности гауссовой кривизны в каждой точке).

Теорема. Поверхности ограниченной внешней (в смысле (2)) и положительной гауссовой кривизны локально выпукла (каждая ее точка имеет окрестность, являющуюся выпуклой поверхностью).

Эта теорема оправдывает содержащиеся в (3) утверждения о регулярности $C_0^{1, 2/2}$ -поверхностей с регулярной метрикой положительной кривизны ($C_0^{1, 2/2}$ -поверхности определены условием равномерного в каждой компактной области стремления к нулю отношения $\theta / \rho^{2/2}$ при $\rho \rightarrow 0$, где ρ — внутреннее расстояние точек $X_1, X_2 \in F$, θ — угол между нормальными в этих точках). В (3) эти утверждения получены посредством ошибочной ссылки на работу (2) (можно показать, что без предположения о полноте поверхности F ограниченной внешней кривизны ее локальная выпуклость еще не следует, как утверждалось в (3), из условия $\omega(G) > 0$ для всякой области $G \subset F$).

2°. Пусть F — гладкая поверхность ограниченной внешней кривизны, заданная в декартовых координатах уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$, где Q — замкнутый квадрат, и пусть для всякой непустой области $G \subset F$ внутренняя кривизна $\omega(G) > 0$ (это условие заведомо выполнено для поверхностной положительной гауссовой кривизны). Границы F , Q обозначаем ∂F , ∂Q соответственно, $\bar{F} = F \cup \partial F$, $\bar{Q} = Q \cup \partial Q$. Обозначим A множество всех точек $X \in \bar{F}$, обладающих свойством: существует плоскость P , которая отсекает от $\bar{F}$ «горбушку» (см. (2), гл. II, § 2), содержащую X внутри.

Лемма 1 (С. З. Шефель). Через каждую точку множества $B = \bar{F} \setminus A$ проходит прямолинейный отрезок с концами на ∂F , на котором касательная плоскость к F стационарна.

Доказательство. Ввиду теорем из (2) (см. гл. II, § 2 и гл. IV, § 3) $\bar{A} = \bar{F}$ ($\bar{A}$ — замыкание A). Пусть $X_0 \in B$, $X_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, $X_n \in A$. Условимся обозначать $\bar{X}$, $\bar{E}$ проекции точки $X \in F$ и множества $E \subset F$ на плоскость x, y соответственно, $\bar{X} \in Q$, $\bar{E} \subset Q$. Каждая горбушка E , отсекаемая от F плоскостью P , является выпуклой поверхностью ((2), гл. IV, § 4), граница которой ∂E есть замкнутая выпуклая кривая в плоскости P . Для всякой горбушки E такой, что $X_n \in E$, обозначим $r(X_0, X_n, E)$ расстояние от X_0 до выпуклого множества E , измеренное по прямой $X_0 X_n$.

Существует такая горбушка $E_0(X_n)$, что

$$r(X_0, X_n, E_0(X_n)) = \inf_{E \in \mathfrak{M}} r(X_0, X_n, E) = r(X_0, X_n),$$

где $\mathfrak{M}$ — множество всех горбушек, содержащих X_n ($E_0(X_n)$ не вырождается в отрезок или точку, иначе для любой невырожденной горбушки E , содержащей точку X_n , расстояние $r(X_0, X_n, E) < r(X_0, X_n)$). Точка X_n лежит на границе горбушки $E_0(X_n)$, иначе найдется поворот плоскости, срезающей горбушку $E_0(X_n)$, дающий новую горбушку E , для которой $r(X_0, X_n, E) < r(X_0, X_n)$. Отрезок X_0X_n , очевидно, разбивает $E_0(X_n)$. Каждая из компонент множества $\partial E_0(X_n) \setminus X_0X_n$ пересекается с ∂Q (X_0X_n — замкнутый отрезок с концами X_0, X_n). Иначе надлежащий поворот плоскости, срезающей горбушку $E_0(X_n)$, вокруг прямой X_0X_n и последующее «вдавливание» этой плоскости приводит к противоречию с экстремальным свойством $E_0(X_n)$. Поэтому существует отрезок $\bar{X}_1^{(n)}\bar{X}_2^{(n)}$, $\bar{X}_1^{(n)}, \bar{X}_2^{(n)} \in \partial E_0(X_n) \cap \partial Q$, разделяющий точки X_0, X_n . Не ограничивая общности, можно считать, что при $X_n \rightarrow X_0$ выпуклые множества $E_0(X_n)$ сходятся к выпуклому множеству E , которое содержит отрезок $\bar{X}_1\bar{X}_2$, $\bar{X}_1, \bar{X}_2 \in \partial E \cap \partial Q$, проходящий через точку X_0 . Если E — отрезок, то в него проектируется лежащий на F отрезок с нужными свойствами. Если же E — невырожденное выпуклое множество, то оно есть проекция горбушки E , $X_0 \in \partial E$.

Обозначим $\partial_0 E$ связную компоненту множества $\partial E \setminus \partial F$, содержащую точку X_0 , и покажем, что $\partial_0 E$ — прямолинейный отрезок (открытый). Действительно, в противном случае найдется содержащая точку X_0 выпуклая дуга $\bar{X}_1\bar{X}_2 \subset \partial E \setminus \partial F$, не совпадающая с хордой $\bar{X}_1\bar{X}_2$, и потому надлежащий поворот вокруг $\bar{X}_1\bar{X}_2$ плоскости, отрезающей E , дает горбушку E' , содержащую X_0 внутри, что невозможно. Очевидно, прямолинейный отрезок $\partial_0 E$, как лежащий на выпуклой поверхности, обладает нужными свойствами.

Лемма 2. Пусть в лемме 1 $\underline{F}$ — поверхность положительной гауссовой кривизны.

Тогда множество A совпадает с множеством всех ее эллиптических точек (см. ⁽²⁾, гл. II, § 1).

Доказательство. Принадлежность каждой эллиптической точки множеству A очевидна. Пусть $X \in A$. Существует выпуклая горбушка $E \subset \subset F$ такая, что $X \in E \setminus \partial E$. Ввиду положительности гауссовой кривизны через X не может проходить прямолинейный отрезок, лежащий на E (см. ⁽⁴⁾, гл. XI, § 3), откуда следует, что точка X эллиптическая.

3. Доказательство теоремы. Пусть Φ — поверхность, удовлетворяющая условиям теоремы, $X_0 \in \Phi$ — произвольная точка. Существует содержащая внутри точку X_0 поверхность $F \subset \Phi$ рассмотренного в лемме 1 вида. Сохраняя смысл обозначений, принятых в п. 2^о, замечаем, что достаточно доказать, что $A = \underline{F}$. Действительно, тогда из леммы 2 следует, что все точки $\underline{F}$ эллиптические и поэтому поверхность $\underline{F}$, как легко убедиться, выпуклая. Множество A , очевидно, открытое. Его проекция $\bar{A}$ на Q — открытое множество, следовательно, множество $\bar{B} = Q \setminus \bar{A}$ замкнуто относительно Q . Достаточно установить, что $\bar{B} = \emptyset$.

Предположим противное и пусть $\bar{X} \in \bar{B}$. Возьмем достаточно малую окрестность V точки $\bar{X}$. Поскольку $\bar{A} = \underline{F}$, найдется точка $\bar{O} \in A \cap V$. Малость V обеспечивает существование в $\bar{B}$ точки $\bar{X}_1$, ближайшей к $\bar{O}$, и условие $S \subset Q$, где S — замкнутый круг с центром в $\bar{O}$ и радиусом $\bar{O}\bar{X}_1$. Вследствие леммы 1 через $\bar{X}_1$ проходит отрезок $\bar{l}$, с концами на ∂Q , в который проектируется отрезок $l_1 \subset F$ с концами на ∂F и стационарной касательной плоскостью. Очевидно, $l_1 \subset Q \setminus \bar{A}$, $S \subset \bar{A}$, поэтому l_1 — отрезок касательной к S в точке $\bar{X}_1$. Возьмем на окружности ∂S точки $\bar{X}_2, \bar{X}_3$, близкие к $\bar{X}_1$ и лежащие по разные стороны от $\bar{X}_1$. Обозначим T_1, T_2 лежащие вне S откры-

тые криволинейные треугольники, ограниченные окружностью dS и касательными к ней в точках X_2, X_1, X_3 . Допустим, что одно из множеств $T_1 \cap B, T_2 \cap B$ пусто. Тогда существует квадрат $Q_1 \subset Q$ со стороной на $\bar{l}_1$, в который проектируется поверхность $F_1 \subset F$, выпуклая, поскольку все ее внутренние точки эллиптические, и содержащая на границе прямолинейный отрезок со стационарной касательной плоскостью. Дополняя F_1 ее зеркальным отражением в нормальной плоскости, проходящей через этот отрезок, получим поверхность, имеющую, очевидно, положительную гауссову кривизну и содержащую внутри прямолинейный отрезок, что невозможно. Следовательно, существуют точки $Y_1 \in T_1 \cap B, Y_2 \in T_2 \cap B$ и проходящие через них проекции $\bar{l}_2, \bar{l}_3$ прямолинейных отрезков на F со стационарной касательной плоскостью. Если точки X_2, X_3 достаточно близки к X_1 , в Q содержится треугольник со сторонами, лежащими на $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$. Этот треугольник есть проекция поверхности $F_2 \subset F$, граница которой имеет стационарную касательную плоскость. Полная внешняя кривизна этой поверхности равна нулю ((²), гл. II, § 1), что невозможно ввиду положительности гауссовой кривизны ((²), гл. IV, § 3). Полученное противоречие завершает доказательство.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
2 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Д. Александров, В. А. Залгаллер, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, 63 (1962). ² А. В. Погорелов, Поверхности ограниченной внешней кривизны, Харьков, 1956. ³ Ю. Ф. Борисов, Вестн. Ленингр. ун-та, № 13 (1959). ⁴ А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948.