Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 5

УДК 517.43 *МАТЕМАТИКА*

А. С. ДИКАНСКИЙ

СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ К ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 6 IV 1971)

1. Как известно ([1]), оператор $\mathscr{L}$, отвечающий эллиптической дифференциальной краевой задаче (7), (8) в гладких функциях, является Ф-оператором ([2]) в соответствующем банаховом пространстве. Сопряженный к нему оператор $\mathscr{L}^*$ действует в пространстве обобщенных функций, а условия разрешимости исходной задачи определяются ядром $\mathscr{L}^*$. Оператор $\mathscr{L}^*$ появлялся в работах ([3], [4], [9], [1]), однако там не выяснялся его явный вид. Другой, более удобный способ описания условий разрешимости, получается с помощью формулы Грина. Если система граничных операторов $\{B_j\}_{j=1}^m$ нормальная (см. ([5])), то удается построить краевую задачу для формально сопряженного к L оператора в гладких функциях, ядро которой совпадает с ядром $\mathscr{L}^*$. Если система $\{B_j\}_{j=1}^m$ не является нормальной, такой подход встречает затруднения. Я. А. Ройтбергу ([6]) удалось освободиться от условий нормальности B_j, построив на основании доказанной им формулы Грина краевую задачу для формально сопряженного к L оператора. Однако эта задача выписывается не в столь явном виде, как в случае нормальных B_j.

В настоящей работе найдена связь между обоими указанными выше подходами описания условий разрешимости задачи (7), (8). Аналогичная задача описания условий разрешимости краевой задачи возникает и для эллиптических псевдодифференциальных краевых задач, изученных М. И. Вишиком и Г. И. Эскиным ([7]).

В работе вначале изучается новый класс корректных краевых задач для дифференциальных и псевдодифференциальных эллиптических операторов в обобщенных функциях, который содержит сопряженные задачи. Выясняется вид таких задач как в дифференциальном (см. (9)), так и в псевдодифференциальном случае (см. (3), (4)). Затем предполагая, что правые части этих задач гладкие, доказывается, что псевдодифференциальная задача (3), (4) (дифференциальная задача (9)) эквивалентна некоторой задаче в гладких функциях (7), (8) (соответственно (12), (13)) без какихлибо ограничений на граничные операторы. Все возникающие здесь операторы могут быть явно описаны.

2. Пусть G — ограниченная область в R^n с гладкой границей Γ. Через H_s, $H_s(G)$, $H_s(\Gamma)$ обозначаются пространства Соболева — Слободецкого в R^n, G и Γ, а через $H_{s,r}$ — пространство функций (обобщенных при $s<0$, $r<0$), имеющих различную гладкость по x', x_n (см. ([1])). $\mathring{H}^{\pm}_{s,r}$ ($\mathring{H}_s(G)$) обозначает подпространство функций в $H_{s,r}$ (H_s), имеющих носитель в $\overline{R^n_{\pm}}$ ($\overline{G}$). Заметим, что пространством, сопряженным к пространству $H_s(G)$ ($H_s(\Gamma)$) относительно расширения скалярного произведения в $L_2(G)$ ($L_2(\Gamma)$), служит пространство $\mathring{H}_{-s}(G)$ ($\mathring{H}_{-s}(\Gamma)$). O_α' означает множество непрерывных при $\xi'\neq 0$ однородных функций.

Через θ^+ обозначается оператор умножения на функцию Хевисайда в $L_2(R^n)$. Для $u\in H_0$ обозначим $u_+=\theta^+u$. При $s<0$ оператор θ^+ определим лишь на тех $f\in H_{s,r}$, которые представимы в виде $f=f_++f_-$, где

$f_+ \in \mathring{H}^{+}_{s,\,r}$, $f_- \in \mathring{H}^{-}_{0,\,r}$, действующим по правилу $\theta^+ f = f_+$. Оператор сужения на G обозначается через p, а на Γ — через γ. Через $\delta(\Gamma)$ обозначается δ-функция, сосредоточенная на Γ.

В ([7]) доказано, что если символ $A(x, \xi) \in C^\infty(\bar{G} \times R^n \setminus \{0\})$ и $\in O_\alpha'$, $\forall x \in \bar{G}$, эллиптический, т. е. $A(x, \xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $x \in \bar{G}$, то он допускает факторизацию $A(x, \xi) = A_+(x, \xi', \xi_n) A_-(x, \xi', \xi_n)$, где A_+ (A_-) — однородная функция по ξ порядка $\varkappa(\alpha - \varkappa)$, допускающая при каждом $x \in \bar{G}$ аналитическое продолжение в $\operatorname{Im} \xi_n > 0$ $(\operatorname{Im} \xi_n < 0)$ и отличная там от нуля. Пусть однородная функция порядка α $T(x, \xi) \in D_\alpha$ (см. ([7])). Тогда $\forall N > 0$ $T(x, \xi)$, $x \in \bar{G}$, допускает разложение

$$T(x, \xi) = T_N^+(x, \xi', \xi_n) + R_T^N(x, \xi', \xi_n), \tag{1}$$

где $T_N^+(x, \xi', \xi_n) \in O_\alpha'$ допускает аналитическое продолжение в $\operatorname{Im} \xi_n > 0$, $|R_T^N(x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi'|)^N / |\xi|^{N-\alpha}$.

Пусть $u_+ \in \mathring{H}_s^+$ и $A(x, \xi) \in D_\alpha$. Согласно (1) и определению θ^+,

$$\theta^+ A u_+ = A_N^+ u_+ + \theta^+ R_A^N u_+, \tag{2}$$

где A, A_N^+, R_A^N — псевдодифференциальные операторы, построенные по символам $A(x, \xi)$, $A_N^+(x, \xi)$, $R_A^N(x, \xi)$ соответственно, причем $R_A^N u_+ \in H_{0,\, s-\alpha}$ при $N = \alpha - s$.

С помощью (2) и функций из разложения единицы, отвечающему G, оператор $\theta^+ A$ определяется и в G. Пусть $A(x, \xi) \in D_\alpha$, $G_k(x, \xi) \in D_{\alpha_k}$, $B_j(x, \xi) \in D_{\beta_j}$, $E_{jk}(x', \xi') \in O'_{\alpha+\beta_j-\alpha_k+1}$, числа α, α_k и β_j — целые *, $f_+ \in \mathring{H}_{s-\alpha}(G)$, $f_j(x') \in H_{s-\beta_j-1/2}(\Gamma)$, $s - \alpha \leqslant 0$, $s - \beta_j > 1/2$. Через $G_k(x, D) \times (\rho_k(x') \otimes \delta(\Gamma))$ обозначается кограничный оператор с символом $G_k(x, \xi)$, т. е. оператор, действующий с Γ внутрь G, через T с индексами будем обозначать гладкие операторы меньшего порядка. Рассмотрим общую псевдодифференциальную эллиптическую краевую задачу в $\bar{G}$:

$$\theta^+ \left(A(x, D) u_+ + \sum_{j=1}^{M} G_j(x, D)(\rho_j \otimes \delta(\Gamma))\right) + T_0(u_+, \rho) = f_+; \tag{3}$$

$$\gamma p B_k(x, D) u_+ + \sum_{j=1}^{M} E_{kj}(x', D') \rho_j + T_k(u_+, \rho) = f_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant L. \tag{4}$$

Теорема 1. *Для нётеровости задачи* (3), (4) *необходимо и достаточно: 1) эллиптичность* $A(x, \xi)$, $x \in \bar{G}$, *2) выполнение аналога условия Шапиро — Лопатинского в точках* Γ *при* $L - M = (\alpha - \varkappa)$.

Отметим, что задача (3), (4) отличается от задач, рассмотренных в ([7]), заменой оператора θ^+ в левой части (3) на p. Это диктует другой выбор пространств правых частей уравнения (3).

3. Пусть $L(x, \xi) \in D_\alpha$ — эллиптический символ, $M_j(x, \xi) \in D_{\beta_j}$, $N_k(x, \xi) \in D_{\alpha_k}$, $H_{jk}(x', \xi') \in O'_{\alpha+\alpha_k-\beta_j+1}$. Через A, B_k, G_j, E_{kj} обозначим операторы, являющиеся расширением по непрерывности формально сопряженных операторов соответственно к L, M_j, N_k, H_{jk}. То, что задача вида (3), (4) является сопряженной к задачам, рассмотренным в ([7]), устанавливает

Теорема 2. *Задачей, сопряженной к общей псевдодифференциальной эллиптической краевой задаче*

$$p\left(L(x, D) v_+(x) + \sum_{k=1}^{L} M_k(x, D)(h_k(x') \otimes \delta(\Gamma))\right) = g(x); \tag{5}$$

$$\gamma p N_j(x, D) v_+(x) + \sum_{k=1}^{L} H_{kj}(x', D') h_k(x') = g_k(x'), \quad 1 \leqslant k \leqslant M, \tag{6}$$

* Результаты пункта 2) остаются справедливыми для любых α, α_k, β_j после некоторого изменения определения класса D_α.

где $g(x) \in H_{s-\alpha}(G)$, $g_k(x') \in H_{s-\alpha_j-1/2}(\Gamma)$, $v(x) \in H_s(G)$, $h_j(x') \in \overline{H}_{s-\alpha-\beta_j+1/2}(\Gamma)$, $s \geqslant 0$, $s > \alpha_j + 1/2$, *является задача* (3), (4), *где* $f_+ \in \overset{\circ}{H}_{-s}(G)$, $f_k \in H_{-s+\alpha-\beta_k-1/2}(\Gamma)$, $u_+ \in H_{-s+\alpha}(G)$, $\rho_k \in H_{-s+\alpha_k+1/2}(\Gamma)$. *Из выполнения условия, аналогичного условию 2) теоремы 1 для задачи* (5), (6), *следует выполнение этого условия для задачи* (3), (4).

Отметим частный случай теоремы 2 для дифференциальных граничных задач.

Теорема 2′. *Задачей, сопряженной к эллиптической дифференциальной граничной задаче*

$$L(x, D)v(x) = g(x); \tag{7}$$

$$\gamma B_j(x, D)v(x) = g_j(x'), \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{8}$$

где порядок эллиптического оператора $L(x, D)$ *равен* $2m$, $g(x) \in H_{s-2m}(G)$, $g_k(x') \in H_{s-\alpha_k-1/2}(\Gamma)$, $v(x) \in H_s(G)$, $s \geqslant \max(2m, \alpha_j + 1)$, *является задача*

$$L^*(x, D)u_+ + \sum_{k=1}^{m} B_j^*(x', D)(\rho_k(x') \otimes \delta(\Gamma)) = f_+, \tag{9}$$

$$f_+ \in \overset{\circ}{H}_{-s}(G),\ u_+ \in \overset{\circ}{H}_{-s+2m}(G),\ \rho_k \in H_{-s+\alpha_k+1/2}(\Gamma).$$

Из выполнения условия Шапиро — Лопатинского для задачи (7), (8) *следует выполнение его аналога для задачи* (9).

Обозначим $t = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant L} \alpha_j$, $l = \max(\alpha, t + 1)$. Повышая гладкость правых частей задачи (3), (4) (соответственно (9)), можно перевести задачу (3), (4) (соответственно (9)) в пространство гладких функций. Гладкость решений сопряженной задачи для дифференциальных задач рассматривалась в ([1], [8], [9]).

Теорема 3. *Пусть* $f_+ \in \overset{\circ}{H}_{-l}(G)$ *имеет вид* $f_+ = f^0(x) + \sum_{k=1}^{l} c_k(x')\delta^{(k-1)}(\Gamma)$, где $f^0(x) \in H_s(G)$, $s \geqslant 0$, $c_k(x') \in H_{s+k-1/2}(\Gamma)$ *и* $f_j(x') \in H_{s-\beta_j^1-1/2}(\Gamma)$.

Тогда решение u_+ *задачи* (3), (4) *имеет вид*

$$u_+ = u_+^0(x) + \sum_{k=1}^{l-\alpha} \rho_{k+M}(x')\delta^{(k-1)}(\Gamma)$$

и задача (3), (4) *переходит в задачу*

$$p(A(x, D)u_+^0 + \sum_{k=1}^{M+l-\alpha} R_{G_k}^N(\rho_k(x') \otimes \delta(\Gamma))) = f^0(x); \tag{10}$$

$$\gamma p B_j^1 u_+^0 + \sum_{k=1}^{M+l-\alpha} E_{jk}^1(x', D')\rho_k(x') = f_j^1(x'), \quad 1 \leqslant j \leqslant L + l, \tag{11}$$

(*если* $t < \alpha$, *полагаем* $l = \alpha$), *где* $u^0(x) \in H_{s+\alpha}(G)$, $\rho_k(x') \in H_{s+\alpha_k-1/2}(\Gamma)$, $1 \leqslant k \leqslant M$, $\rho_{k+M}(x') \in H_{s+k+\alpha-1/2}(\Gamma)$, $1 \leqslant k \leqslant l - \alpha$. *При этом появившиеся в* (11) *операторы выражаются через операторы из* (5), (6).

Для дифференциальных операторов теорема 3 преобразуется так:

Теорема 3′. *Пусть* $f_+ \in \overset{\circ}{H}_{-l}(G)$ *имеет вид* $f_+ = f^0(x) + \sum_{k=1}^{l} c_k(x')\delta^{(k-1)}(\Gamma)$, где $f^0(x) \in H_{s-2m}(G)$ $(s \geqslant l)$, $c_k(x') \in H_{s-l+k-1/2}$, $H_{s-l+k-1/2}(\Gamma)$, *то решение* u_+ *задачи* (9) *имеет вид*

$$u_+ = u_+^0(x) + \sum_{k=1}^{l-2m} \rho_{k+m}(x')\delta^{(k-1)}(\Gamma)$$

и задача (9) *переходит в задачу*

$$A^*(x, D)\,u^0(x) = f^0(x); \tag{12}$$

$$\gamma B_j^1(x, D)\,u^0 + \sum_{k=1}^{m+l-2m} E_{jk}^1(x', D')\,\rho_k(x') = c_j(x'), \quad 1 \leqslant j \leqslant l \tag{13}$$

(если $l < 2m$, то полагаем $l = 2m$), где $B_j^1 \equiv 0$ для $j \geqslant 2m$, $u^0(x) \in H_s(G)$, $\rho_j(x') \in H_{s-l+\alpha_j-1/2}(\Gamma)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\rho_{k+m}(x') \in H_{s-l+k-1/2}(\Gamma)$, $1 \leqslant k \leqslant l-2m$.

Отметим, что краевые задачи вида (13) для эллиптического дифференциального уравнения в принципе не отличаются от обычных краевых задач вида (8) и для них справедлива (с соответствующими модификациями) обычная эллиптическая теория.

Теоремы 2 и 3 позволяют описать в явном виде условия разрешимости задачи (5), (6).

Теорема 4. *Для разрешимости задачи* (5), (6) *необходимо и достаточно выполнение условий ортогональности*:

$$(g, u_+^0)_{L_2(G)} + \sum_{k=1}^{M} \langle g_k, \rho_k \rangle_{L_2(\Gamma)} + \sum_{k=M+1}^{l-\alpha} \langle \gamma D_n^{k-1} u^0, \rho_k \rangle_{L_2(\Gamma)} = 0, \tag{14}$$

где $u_+^0(x)$, $\rho_k(x')$ — решения однородной задачи (10), (11).

Отметим частный случай дифференциальной краевой задачи.

Если граничные операторы B_j образуют нормальную систему и их порядки меньше $2m$ (тогда $l - 2m = 0$), то в матрице дифференциальных операторов $\| E_{jk}^1 \|_{j=1,\ldots,m}^{k=1,\ldots,2m}$ найдется невырожденный минор размера $m \times m$, состоящий из функций. Обращая этот минор, определим $\rho_k(x')$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ через $\gamma B_j^1(x, D)\,u^0(x)$ и функции $c_k(x')$: $\rho_k(x') = \gamma B_j^2 u^0 + d_k(x')$. Подставляя найденные выражения в оставшиеся m соотношений из (13), получим обычную краевую задачу вида (8), а в условия (14) надо подставить $\rho_k = \gamma B_j^2 u^0(x)$.

4. Рассмотрим пример эллиптической дифференциальной краевой задачи. Пусть в G задана краевая задача

$$\Delta v = g, \quad \left[B_1\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial n} + B_2\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)\right] v \Big|_\Gamma = g_1(x'), \tag{15}$$

где B_1, B_2 — однородные дифференциальные операторы порядков 1 и 2 соответственно. Предполагается выполненным условие Шапиро — Лопатинского. Согласно теореме 3′, задачей, сопряженной к задаче (15) в гладких функциях, является задача

$$\Delta u = f, \quad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial n} u \Big|_\Gamma + B_2^* \rho(x') = c_1(x'), \quad \frac{1}{i} u \Big|_\Gamma + B_1^* \rho(x') = c_2(x'). \tag{16}$$

В случае, если граничный оператор в (15) нормален, задача (16) эквивалентна обычной краевой задаче. Действительно, пусть, например, $B_1(\partial / \partial x') \equiv 1$. Тогда из второго граничного условия в (16) находим $\rho(x') = u|_\Gamma - c_2(x')$ и после подстановки в первое граничное условие получим $(\partial / \partial n + B_2) u|_\Gamma = c_3(x')$.

Автор выражает глубокую благодарность Г. И. Эскину за внимание и помощь в работе.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
5 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. [2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, 12, № 2 (1957). [3] M. Schechter, Commun. Pure and Appl. Math., 13 (1960). [4] Ж. Петре, Сборн. пер. Математика, 7, 1 (1963). [5] М. Шехтер, Сборн. пер. Математика, 4, 5 (1960). [6] Я. А. Ройтберг, Матем. сборн., 83, № 2 (1970). [7] М. И. Вишик, Г. И. Эскин, УМН, 20, № 3 (1965). [8] Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин, Матем. сборн., 73, № 1 (1967). [9] J. Lions, E. Magenès, Problémes aux limites non homogènes et applications, 1, Paris, 1968.