Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 2

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. А. ВАЛИЕВ

О СПЕКТРАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТНЫХ РАСШИРЕНИЙ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 15 III 1971)

1. Под обратным спектром $\Sigma = \{K_\alpha \ \varpi_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, понимается направленная (индексами α) система топологических пространств K_α, называемых элементами спектра Σ, с непрерывными отображениями (проекциями) $\varpi_\alpha^\beta: K_\beta \to K_\alpha$, определенными всякий раз, как только $\beta > \alpha$; при этом выполнено условие транзитивности: если $\gamma > \beta > \alpha$, то $\varpi_\alpha^\gamma = \varpi_\alpha^\beta \cdot \varpi_\beta^\gamma$. В этой работе будут рассматриваться спектры Σ, элементами которых являются бесконечные T_0-пространства K_α, которые можно рассматривать как бесконечные частично упорядоченные множества ([1]), для которых верхняя грань числа элементов во всевозможных упорядоченных цепочках элементов K_α конечна. Элементы частично упорядоченного множества K_α будем называть также симплексами, а само множество K_α — комплексом. Как и в ([2]), такие спектры мы будем называть комбинаторными. Будем говорить, что симплекс t_α комплекса K_α является гранью симплекса t_α' комплекса K_α, если $t_\alpha \leqslant t_\alpha'$. Симплекс $t_\alpha \in K_\alpha$ назовем вершиной, если в комплексе K_α нет симплекса t_α' такого, что $t_\alpha > t_\alpha'$. Все необходимые для понимания этой работы понятия можно найти в работах ([1–3], [6], [7], [11]).

Под разбиением произвольного множества M будем понимать произвольную конечную дизъюнктную систему $\{M_1, \dots, M_s\}$, дающую в сумме M. Определим понятие сравнения подмножеств комплекса K и понятие укрупнения комплекса K.

Пусть K — произвольный комплекс. Пусть далее t — произвольный элемент и A — произвольное подмножество комплекса K, причем $t \notin A$. Будем говорить, что элемент t сравним с подмножеством A, если существует элемент $t' \in A$ такой, что $t \geqslant t'$ и для любого элемента $t' \in A$ либо $t \geqslant t''$, либо элемент t не сравним с элементом t''. В противном случае будем говорить, что элемент t не сравним с подмножеством A. Рассмотрим теперь произвольные дизъюнктные подмножества A и B комплекса K. Будем говорить, что множество B сравнимо с множеством A, если любой элемент $t \in B$ сравним с множеством A.

Пусть теперь $\operatorname{Ind} K = q < \infty$ * и K_0 — множество всех вершин комплекса K, а

$$K_r = \left\{ \begin{array}{l} t \in K : t > t' \text{ для некоторого } t' \in K_{r-1} \text{ и не существует } t'' \text{ для} \\ \text{которого } t > t'' > t' \end{array} \right\},$$

$r = 1, 2, \dots, q$. Очевидно, $K_i \cap K_j = \Lambda$ при $i \neq j$ и $K = \bigcup_{i=0}^{q} K_i$.

Пусть дано произвольное разбиение $\varphi_r = \{T_1^r, \dots, T_{s_r}^r\}$ множества K_r, $r = 0, 1, \dots, q-1$. По разбиению φ_r определим разбиение $\Psi_{r+1}(\varphi_r)$ множества K_{r+1} следующим образом: положим

$$M_{i_1 \dots i_h}^{r+1} = \left\{ \begin{array}{l} t \in K_{r+1} : t \text{ сравним с каждым множеством } T_{i_1}^r, \dots, T_{i}^r \\ \text{и не сравним с остальными элементами } T_i \text{ разбиения } \varphi_r \end{array} \right\}.$$

* $\operatorname{Ind} K$ есть уменьшенная на единицу верхняя грань длин упорядоченных цепочек элементов комплекса K ([2]).

Ясно, что множества $M^{r+1}_{i_1\ldots i_h}$ образуют разбиение множества K_{r+1}. Обозначим это разбиение через $\Psi_{r+1} = \Psi_{r+1}(\varphi_r)$.

Пусть еще дано конечное разбиение Θ_{r+1} множества K_{r+1}. Тогда положим разбиение $\varphi_{r+1} = \varphi_{r+1}(\varphi_r, \Theta_{r+1})$ равным пересечению $\Theta_{r+1} \wedge \Psi_{r+1}$ разбиений Θ_{r+1} и Ψ_{r+1}, состоящему из всевозможных непустых попарных пересечений элементов разбиений Θ_{r+1} и Ψ_{r+1}.

Пусть теперь даны конечные разбиения Θ_r множеств K_r, $r = 0, 1, \ldots, q$. Тогда положим $\varphi_0 = \Theta_0$, $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_0, \Theta_1), \ldots, \varphi_q = \varphi_q(\varphi_{q-1}, \Theta_q)$. В конечном множестве $L = L(K, \Theta_0, \ldots, \Theta_q) = \bigcup\limits_{i=0}^{q} \varphi_i$, являющемся разбиением комплекса K, следующим образом можно ввести отношение порядка. Для элементов T_1 и T_2 множества L положим $T_1 < T_2$, если множество T_2 сравнимо с множеством T_1. Из введенного отношения порядка во множестве L видно, что множество L превращается в частично упорядоченное множество, т. е. в конечный комплекс. Получаемое таким образом разбиение $L = L(K, \Theta_0, \ldots, \Theta_q)$ и комплекс $L = L(K, \Theta_0, \ldots, \Theta_q)$ будем называть **укрупнением комплекса K, порожденным разбиениями Θ_i**, $i = 0, 1, \ldots, q$.

Если дано конечное разбиение $\Theta = \{A_s, s = 1, \ldots, \eta\}$ комплекса K, то определены разбиения $\Theta_i = \Theta \wedge K_i = \{A_s \cap K_i, s = 1, \ldots, \eta\}$ множеств K_i, $i = 0, 1, \ldots, q$. В этом случае положим $L(\Theta) = L(K, \Theta) = L(K, \Theta_0, \ldots, \Theta_q)$. Очевидно, укрупнение $L(\Theta)$ вписано в разбиение Θ комплекса K.

Лемма 1.1. *Если* $\operatorname{Ind} K \leqslant n$, *то* $\operatorname{Ind} L \leqslant n$, $L = L(K, \Theta)$.

Лемма 1.2. *Если* $\dim K \leqslant n$ [5], *то* $\dim L \leqslant n$, $L = L(K, \Theta)$.

Построение по данному спектру его укрупнения и канонического отображения полного предела исходного спектра. Пусть дан произвольный спектр $\Sigma = \{K_\alpha, \tilde\omega_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, из комплексов K_α. Рассмотрим совокупность всех укрупнений $L_\mu = L_\mu(K_\alpha, \Theta)$, $\mu \in \mathfrak{M}_\alpha$, комплекса K_α для всевозможных $\alpha \in \mathfrak{A}$. Во множестве всех комплексов L_μ следующим образом введем отношение порядка. Для комплексов $L_\nu = L_\nu(K_\beta, \Theta_1)$ и $L_\mu = L_\mu(K_\alpha, \Theta_2)$ положим $\nu \geqslant \mu$, если укрупнение L_ν вписано в разбиение $(\tilde\omega_\alpha^\beta)^{-1} L_\mu$ $(\beta \geqslant \alpha)$. Ясно, что указанный порядок во множестве комплексов L_μ транзитивен. При $\nu \geqslant \mu$ определено отображение $\pi_\mu^\nu \colon L_\nu \to L_\mu$ следующим образом. Пусть $L_\nu = \bigcup\limits_{i=1}^{s_\nu} T_i$ и $L_\mu = \bigcup\limits_{j=1}^{s_\mu} T_j$, тогда положим $\pi_\mu^\nu T_i = T_j$, если $T_i \subseteq (\tilde\omega_\alpha^\beta T_j)^{-1}$. Можно показать, что отображения π_μ^ν непрерывны при $\nu \geqslant \mu$ и множество всех комплексов L_μ является направленным относительно порядка, введенного выше. Таким образом, мы можем говорить о спектре $\tilde\Sigma = \{L_\mu, \pi_\mu^\nu\}$, $\mu \in \mathfrak{M}_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, из конечных комплексов L_μ. Построенный спектр $\tilde\Sigma$ будем называть (конечным) укрупнением спектра Σ. Полным пределом спектра Σ является бикомпактное T_0-пространство $\tilde Q_0$ [1].

Оказывается, существует гомеоморфное отображение полного предела Q_0 спектра Σ на некоторое множество $\tilde Q_0' \subseteq \tilde Q_0$. Пусть x — произвольный элемент пространства Q_0. Этому элементу соответствует проекционное множество $x = \{t_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ спектра Σ. Рассмотрим для всевозможных α образы $\pi_\mu^\alpha t_\alpha = T_\mu$ симплекса $t_\alpha \in K_\alpha$ в укрупнениях L_μ этого комплекса, $\mu \in \mathfrak{M}_\alpha$. Легко показать, что множество $y = \{T_\mu, \mu \in \mathfrak{M}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ является проекционным множеством спектра $\tilde\Sigma$. Полученное отображение $\pi \colon Q_0 \to \tilde Q_0$, ставящее в соответствие точке $x = \{t_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \in Q_0$ точку $y = \{T_\mu, \mu \in \mathfrak{M}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \in \tilde Q_0$, будем называть каноническим отображением пространства Q_0 в пространство $\tilde Q_0$.

Предложение 1.1. *Каноническое отображение* $\pi \colon Q_0 \to \tilde Q_0$ *является гомеоморфизмом* Q_0 *в* $\tilde Q_0$.

Отметим следующий факт, установленный в [1]. Спектр $\Sigma = \{K_\alpha, \tilde\omega_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, из конечных комплексов K_α удовлетворяет условию (*): для любой нити $t = \{t_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и любого индекса α_0 существует такой индекс $\beta \geqslant \alpha_0$, что симплекс t_β является вершиной.

Пусть теперь элементами спектра Σ являются бесконечные комплексы K_α. Тогда спектр Σ назовем специальным, если выполнено условие (*). Существуют примеры не специальных спектров.

Предложение 1.2. *Для того чтобы образ $\pi(X)$ нижнего предела X спектра Σ при каноническом отображении π содержался в нижнем пределе Y спектра $\widetilde{\Sigma}$, необходимо и достаточно, чтобы спектр Σ был специальным.*

Следствие 1.1. *Если спектр Σ специален, то каноническое отображение π гомеоморфно отображает нижний предел спектра Σ в нижний предел спектра $\widetilde{\Sigma}$.*

Теорема 1.1. *Для K-полного пространства X ([6]) спектр из всех его канонических покрытий является специальным.*

Следствие 1.2. *Любое полное в смысле Дьедонне пространство, в частности, любое паракомпактное пространство, является нижним пределом некоторого специального спектра.*

Ниже в п. I будем считать $\mathrm{Ind}_c X \leqslant n$, соответственно $\dim_c X \leqslant n$, если пространство X является нижним пределом некоторого существенного спектра Σ с $\mathrm{Ind}\,\Sigma \leqslant n$ *, соответственно, с $\dim \Sigma \leqslant n$ *, не требуя от спектра Σ условие хаусдорфовости (в отличие от ([3, 6, 7])).

Определение 1.1. Будем писать $\mathrm{Ind}_c' X \leqslant n$, соответственно $\dim_c' X \leqslant n$, если существует хотя бы один специальный спектр Σ с $\mathrm{Ind}\,\Sigma \leqslant n$, соответственно с $\dim \Sigma \leqslant n$, нижний предел которого гомеоморфен пространству X.

Из специальности спектров, составленных из конечных комплексов, следует, что для бикомпактов справедливы равенства

$$\dim_c X = \dim_c' X, \quad \mathrm{Ind}_c X = \mathrm{Ind}_c' X.$$

Теорема 1.2. *Если $\mathrm{Ind}_c' X \leqslant n$ и $\dim_c' X \leqslant m$, то существует такое бикомпактное T_1-расширение bX пространства X, что выполняются следующие неравенства*

$$\mathrm{Ind}_c' bX = \mathrm{Ind}_c bX \leqslant n, \quad \dim_c' bX = \dim_c bX \leqslant m.$$

II. Определение 2.1. Пусть X — произвольное пространство и $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ — направленная система канонических покрытий ** α пространства X. Будем говорить по аналогии с ([8]), что система $\mathfrak{A}$ конфинально измельчается по конечным покрытиям, если в любое конечное открытое покрытие ω пространства X можно вписать некоторое покрытие $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Напомним ([10]), что пространство X называется квазинормальным, если оно регулярно и в нем любые два дизъюнктные π-множества *** имеют дизъюнктные окрестности, являющиеся каноническими открытыми множествами.

Предложение 2.1. *Если в квазинормальном пространстве X дана конфинально измельчающаяся по конечным покрытиям система конечных канонических покрытий, то спектр, построенный по этой системе, будет хаусдорфовым, а нижний предел X этого спектра будет бикомпактом.*

При помощи спектров из комплексов можно доказать, что справедлива

Теорема 2.1. *Если $\Delta X \leqslant n$ ([8]) и $wX \leqslant \tau$, то существует такое бикомпактное хаусдорфово расширение bX пространства X, что*

$$\Delta bX \leqslant n, \qquad wzX \leqslant \tau \text{ ****}.$$

---

* $\dim \Sigma \leqslant n$, соответственно $\mathrm{Ind}\,\Sigma \leqslant n$, если для любого комплекса K_α этого спектра выполнено неравенство $\dim K_\alpha \leqslant n$, соответственно $\mathrm{Ind}\,K_\alpha \leqslant n$.

** Каноническим покрытием пространства X называется локально конечное покрытие, элементами которого являются замыкания попарно не пересекающихся открытых множеств пространства X ([8]).

*** π-множеством пространства X называется всякое множество, являющееся пересечением конечного числа канонических замкнутых множеств.

**** Эта теорема независимо и совершенно другим способом доказана также Б. А. Пасынковым.

Теорема 2.2. *Любое полное метрическое пространство X является нижним пределом некоторого счетного хаусдорфового спектра Σ, при этом если* $\operatorname{Ind} X \leqslant r$, *то* $\operatorname{Ind} \Sigma \leqslant r$.

Теорема 2.3. *Любое сильно паракомпактное полное метрическое пространство X является нижним пределом некоторого счетного специального хаусдорфового спектра Σ, при этом если* $\operatorname{Ind} X \leqslant r$, *то* $\operatorname{Ind} \Sigma \leqslant r$.

III. Теорема 3.1. *Если $X_1, \ldots, X_k$ — произвольные пространства, то*

$$\operatorname{Ind}_c \left(\prod_{i=1}^{k} X_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Ind}_c X_i,$$

$$\operatorname{ind}_c \left(\prod_{i=1}^{k} X_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_c X_i.$$

Теорема 3.2. *Пусть X — паракомпактное пространство, тогда*

$$\operatorname{Ind}_c X \leqslant \Delta X.$$

Теорема 3.3. *Всегда*

$$\operatorname{Ind} \left(\prod_{i=1}^{k} X_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Ind}_c X_i,$$

$$\operatorname{ind} \left(\prod_{i=1}^{k} X_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_c X_i,$$

$$\dim_c \left(\prod_{i=1}^{k} X_i \right) \leqslant \prod_{i=1}^{k} (\dim_c X_i + 1) - 1.$$

Результаты п. III являются обобщением результатов работы (9).

Эта работа выполнена под руководством Б. А. Пасынкова, которому я выражаю свою самую искреннюю благодарность.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 П. С. Александров, УМН, 2, № 1, 5 (1947). 2 Б. А. Пасынков, ДАН, 131, № 2, 253 (1960). 3 Б. А. Пасынков, Матем. сборн., 57, № 4, 449 (1962). 4 Б. А. Пасынков, Тр. Груз. матем. инст. им. Размадзе, 27, 43 (1960). 5 Б. А. Пасынков, Вестн. Московск. унив., матем., мех., № 3, 47 (1965). 6 В. А. Валиев, Вестн. Московск. унив. матем., мех., № 6, 40 (1968). 7 В. А. Валиев, Вестн. Московск. унив., матем., мех., № 1 (1968). 8 В. И. Пономарев, Матем. сборн., 60 (102), № 1, 90 (1963). 9 И. К. Лифанов, ДАН, 184, № 6 (1969). 10 В. И. Зайцев, ДАН, 178, № 4, 778 (1968). 11 В. А. Валиев, II Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям, Кишинев, 1969.