Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 2

УДК 517.933

МАТЕМАТИКА

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОЖЕСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ДВИЖЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 VI 1971)

1. Среди движений, возникающих в динамических системах с некомпактным фазовым пространством, можно выделить класс так называемых осциллирующих.

Определение. Движение называется осциллирующим, если оно не устойчиво по Лагранжу (т. е. замыкание соответствующей полутраектории некомпактно), но не стремится к бесконечности.

Осциллирующие движения были найдены К. А. Ситниковым в частном случае задачи трех тел [1], А. М. Леонтовичем в одной биллиардной задаче [2], В. М. Алексеевым при изучении колебаний одномерного осциллятора [3, 4]. Применяемые этими авторами методы позволили установить, что множество начальных данных, порождающих осциллирующие движения, в каждой из рассмотренных задач имеет мощность континуума, однако вопрос о его лебеговой мере остается открытым. Ниже дается ответ на этот вопрос для одной динамической системы классической механики.

2. Рассмотрим следующую динамическую систему. Пусть $f(t)$ — аналитическая функция, имеющая период $D>0$ по t, т. е. $f(t+D)=f(t)$. Предположим, что бесконечно тяжелая горизонтальная плита движется в вертикальном направлении со временем по закону $x=f(t)$. На эту плиту вертикально вниз падает шарик и отталкивается от нее по закону упругого удара. Предположим, что после одного из моментов столкновения t с плитой шарик приобрел скорость v, а после следующего момента столкновения t' — скорость v'. Значения t', v' определяются через значения t, v с помощью следующих формул:

$$\begin{gathered} f(t)+v(t'-t)-\frac{g}{2}(t'-t)^2=f(t'),\\ v'=g(t'-t)-v+2\dot f(t'), \end{gathered} \tag{1}$$

g — ускорение свободного падения.

Формулы (1) определяют отображение A плоскости (t, v): $A(t, v) \doteq (t', v')$. Очевидно, что движение шарика будет осциллирующим тогда и только тогда, когда для любой константы $c>0$ найдется такой момент столкновения, что скорость шарика будет больше c. Если $\dot f$ мало отличается от нуля, то из [5] следует, что все движения шарика ограничены, так как сохраняется вечный адиабатический инвариант (см. также [6]). Вопрос о возможности разгона возник в связи с обоснованием механизма ускорения Ферми [7, 8]. В [9] рассматривается упрощенный вариант задачи, когда плита двигается с постоянной скоростью по пилообразному закону (вверх, вниз), и на основании нестрогих, физических рассуждений делается вывод о том, что скорость шарика при столкновении его с плитой растет, как $t^{1/3}$. В [10] для широкого класса функций автором установлено существование континуума начальных данных на плоскости (t, v), для которых траектории преобразования A разгоняются по скорости до бесконечности. В настоящей работе при определенных ограничениях на аналитическую функцию $f(t)$ доказано существование множества положительной меры таких начальных данных, а это, в свою очередь, эквивалентно существованию множества положительной меры начальных данных в фазовом пространстве (x, v, t), задающих осциллирующие движения.

Теорема 1. *Предположим, что $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *существуют целое $K > 0$ и t_0 такие, что*

$$0{,}5\ DgK = \dot{f}(t_0) \quad u \quad -g < \ddot{f}(t_0) = \beta < 0;$$

2) $\ddot{f}(t_0) = \beta \neq -\frac{g}{2} + \frac{g}{2}\cos\left(2\pi\frac{m}{n}\right),$

где $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$; $n = 1, 2, \ldots, 262$;

3) $a_0(\beta)\dddot{f}(t_0) + a_1(\beta)\dddot{f}^2(t_0)$, *где $a_0(y)$, $a_1(y)$* — некоторые фиксированные *функции, не зависящие от вида функции f, причем $a_0(\beta) \neq 0$.*

Тогда на плоскости (t, v) существует множество положительной меры начальных данных такое, что траектории преобразования A, соответствующие этим начальным данным, разгоняются по скорости до бесконечности.

Легко видеть, что в пространстве аналитических, D-периодических функций множество функций, удовлетворяющих условию теоремы 1, содержит открытое подмножество.

Пример. $f(t) = h\sin\omega t$; $D = 2\pi/\omega$. В этом случае условие 1) теоремы 1 сводится к условиям

$$\frac{h\omega^2}{g}\cos\omega t_0 = K\pi; \tag{2}$$

$$\frac{\beta^2}{g^2} = \left(\frac{h\omega^2}{g}\right)^2 - (K\pi)^2 < 1, \tag{3}$$

а условие 2) сводится к условию

$$\left(\frac{h\omega^2}{g}\right)^2 - (K\pi)^2 \neq \left[-{}^1\!/_2 + {}^1\!/_2\cos\left(2\pi\frac{m}{n}\right)\right]^2 \tag{4}$$

при $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$; $n = 1, \ldots, 262$.

Условия (2) — (4) определяют на плоскости параметров (h, ω) область $G(K)$, которая зависит от целого K. Условие 3) теоремы 1, очевидно, эквивалентно условию

$$\frac{a_1(\beta)}{a_0(\beta)} = \frac{\ddddot{f}(t_0)}{\dddot{f}^2(t_0)} = -\frac{\sin\omega t_0}{h\omega^2\cos^2\omega t_0} \neq 0.$$

Из (2), (3) следует, что при фиксированном $\beta = g\sqrt{\left(\frac{h\omega^2}{g}\right)^2 - (K\pi)^2}$ выражение $\frac{\sin\omega t_0}{h\omega^2\cos^2\omega t_0}$ стремится к нулю при $K \to \infty$. Отсюда следует, что на плоскости параметров (h, ω) существует открытое множество, для которого выполнены все условия теоремы 1.

3. Наметим путь доказательства теоремы 1.

Лемма. *Если существуют t_0 и целое $K > 0$ такие, что $\dot{f}(t_0) \equiv 0{,}5KDg$, то существует траектория*

$$\gamma = \{(t_0^0, v_0^0), (t_1^0, v_1^0), \ldots, (t_n^0, v_n^0), \ldots\}$$

преобразования A, для которой скорость возрастает до бесконечности, причем прирост скорости на каждом шаге равен KDg.

Доказательство. Пусть $m > 0$ — целое число. Положим

$$(t_0^0, v_0^0) = \left(t_0, \frac{mDg}{2}\right); \quad (t_n^0, v_n^0) = A^n(t_0^0, v_0^0).$$

Из (1) легко следует, что

$$t_0 \equiv t_0^0 \equiv t_1^0 \equiv \ldots \equiv t_n^0 \equiv \ldots (\mathrm{mod} D),$$

причем

$$t_{n+1}^0 = t_n^0 + \frac{2v_n^0}{g} = t_n^0 + D(m + 2nK),$$

$$v_{n+1}^0 = v_n^0 + 2\dot{f}(t_{n+1}^0) = v_n^0 + KDg = \frac{Dg}{2}[m + 2(n+1)K].$$

Лемма доказана.

Действие преобразования A в окрестности траектории γ, построенной в лемме, определяет последовательность преобразований A_n, $n = 1, 2, \ldots$, такую, что при всех n выполнены условия

1) при некотором $\varepsilon_0 > 0$ A_n определено в окрестности

$$U_{\varepsilon_0} = \{t, v\colon \max(|t|, |v|) \leqslant \varepsilon_0\};$$

2) для любой точки (t, v) такой, что $(t, v) - (t_n^0, v_n^0) \in U_{\varepsilon_0}$,

$$A(t, v) = (t_{n+1}^0, v_{n+1}^0) + A_{n+1}(t - t_n^0, v - v_n^0)$$

(сложение точек покоординатное).

Теорема 1 легко следует из следующей теоремы.

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что если $(t, v) \in U_\delta$, то при любом n*

$$A_n \circ A_{n-1} \circ \ldots \circ A_1(t, v) \in U_\varepsilon.$$

Теорема 2 утверждает, что траектория γ устойчива по Ляпунову. Доказательство ее опирается на теорему 2 из ([11]).

В заключение выражаю глубокую благодарность В. М. Алексееву за постоянное внимание к работе автора.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. А. Ситников, ДАН, **133**, № 2, 303 (1960). [2] А. М. Леонтович, ДАН, **145**, № 3, 523 (1962). [3] В. М. Алексеев, Матем. сборн., **77** (119), 545 (1968). [4] В. М. Алексеев, Там же, **78** (120), 3 (1969). [5] В. И. Арнольд, ДАН, **142**, № 4, 756 (1962). [6] А. А. Андронов, М. А. Леонтович, Л. И. Мандельштам, ЖРФХО, **60**, 413 (1928). [7] E. Fermi, Phys. Rev., **75**, 1169 (1949). [8] С. Улам, Сборн. пер. Математика, **7**, 137 (1963). [9] Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, 1970. [10] Л. Д. Пустыльников, УМН, **23**, в. 4, 251 (1968). [11] Л. Д. Пустыльников, ДАН, 202, № 1 (1971).