

А. Б. ВЕНКОВ

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО АВТОМОРФНЫМ СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА И ФОРМУЛА СЛЕДА СЕЛЬБЕРГА В ПРОСТРАНСТВЕ $SO_0(n, 1)/SO(n)$

(Представлено академиком Ю. В. Линником 9 III 1971)

Пусть $S = SO_0(n, 1) / SO(n)$ — n -мерное вещественное гиперболическое пространство, Γ — дискретная группа, для которой $\Gamma \backslash S$ некомпактно, но имеет конечный инвариантный объем, L — оператор Лапласа — Бельтрами на S . В настоящей статье сформулированы результаты, полученные нами при исследовании разложения по автоморфным относительно Γ собственным функциям оператора L и приведена обобщенная на этот случай формула следа Сельберга. Исследование разложения по собственным функциям мы проводим методом, который обобщает метод Л. Д. Фаддеева ⁽¹⁾ для случая верхней полуплоскости. Его достоинство, с нашей точки зрения, состоит в том, что аналитическое продолжение рядов Эйзенштейна и теорема разложения получаются с помощью общей теории самосопряженных операторов и не требуют теоретико-числовых соображений.

Введем следующие обозначения: $G = SO_0(n, 1)$, $K = SO(n)$ для произвольной $g \in G$, g_{ij} — ее матричные элементы, $0 \leq i, j \leq n$. Пусть $P = NAM$ — нормализатор в G унитарной подгруппы $N \subset G$ из разложения Ивасава $G = NAK$. В нашем случае $A = A(\eta)$ — однопараметрическая подгруппа G с вещественным параметром $\eta > 0$, N — коммутативная подгруппа G размерности $n - 1$. Любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = ua(\eta)k$, где $u \in N$, $a(\eta) \in A$, $k \in K$. Транзитивное действие группы P на S порождает естественные координаты $z \in S$, $z = \{y, x\}$, где $y > 0$, $x \in R^{n-1}$. Обозначим через $y(z)$ координату y точки $z \in S$, через gz — образ $z \in S$ при преобразовании $g \in G$. Если $g \in NM$, то для $z \in S$ $y(gz) = y(z)$. Далее обозначим через μ инвариантную меру на S . Фиксируем некоторый инвариант пары точек $u(z, z')$; $z, z' \in S$.

Предположим, что дискретная группа $\Gamma \subset G$ обладает свойствами:

- 1) Ее фундаментальная область F на S некомпактна, но $\mu(F) < \infty$. (Как показал А. Сельберг ⁽²⁾, из этого условия вытекает существование области F с конечным числом параболических вершин. Это означает следующее: найдется лишь конечное число элементов $g_\alpha \in G$, $g_\alpha \in \Gamma$, и максимальных подгрупп $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$ таких, что $g_\alpha^{-1}\Gamma_\alpha g_\alpha \subset P$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$).

- 2) Существует вещественное число $\theta > 0$ такое, что для любого элемента $g = ua(\eta)k \in g_\alpha^{-1}\Gamma_\alpha g_\alpha$, $g \in P$, выполняется $(1 - k_{11})/\eta \geq \theta$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Заметим, что F можно выбрать так, что $g_1 = e$, где e — единичный элемент группы G . Второе условие вытекает из первого для случая $n = 2$. В общем случае 1) и 2) выполняются, например, для арифметических групп $\Gamma \subset G$. Из 1) вытекает следующее свойство группы Γ :

$$g_\alpha^{-1}\Gamma_\alpha g_\alpha \cap P = g_\alpha^{-1}\Gamma_\alpha g_\alpha \cap NM, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

Сформулируем теперь теоремы, обобщающие результаты ⁽³⁾.

Теорема 1. *Оператор Лапласа L , определенный на гладких автоморфных относительно Γ функциях, имеет единственное самосопряженное расширение $\bar{L}$ в пространстве $L_2(F, \mu)$. Его резольвента $R(s) = (L - s(n-1-s))^{-1}$ — интегральный оператор, имеющий ядро $r(z, z'; s)$, которое при фиксированных $z, z' \in F$, $z \neq z'$, является мероморфной функцией комплексного переменного s на всей s -плоскости. Полюса, для которых $\operatorname{Re} s \geq (n-1)/2$ располагаются только на прямой $\operatorname{Re} s =$*

$= (n-1)/2$ и в интервале $(n-1)/2 \leq s \leq n-1$. Все эти полюса простые, кроме, быть может, полюса в точке $s = (n-1)/2$.

Пусть $z \in S$, s — комплексное число; введем ряды Эйзенштейна

$$E^\alpha(g_\alpha z, s) = \sum_{g \in \Gamma_\alpha \setminus \Gamma} y^s(gz), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

Эти ряды сходятся при $\operatorname{Re} s > n-1$.

Теорема 2. При фиксированном $z \in F$ $E^\alpha(z, s)$ являются мероморфными функциями на всей s -плоскости, аналитическими в окрестности прямой $\operatorname{Re} s = (n-1)/2$ за исключением, быть может, точки $s = (n-1)/2$ и удовлетворяют функциональному уравнению

$$E^\alpha(z, s) = \sum_{\beta=1}^m E^\beta(z, n-1-s) S_{\alpha\beta}(s), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m,$$

где $S_{\alpha\beta}(s)$ — матричные элементы некоторой матрицы $S(s)$,

$$\sum_{\gamma=1}^m S_{\alpha\gamma}(s) S_{\gamma\beta}(n-1-s) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Оказывается, что ряды Эйзенштейна $E^\alpha(z, s)$ при $s = (n-1)/2 + ir$, $-\infty < r < \infty$, образуют полную систему собственных функций непрерывного спектра оператора $\bar{L}$. Обозначим через H пространство квадратично-интегрируемых по мере Лебега векторнозначных функций $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)\}$ на полуоси $[0, \infty)$ со скалярным произведением

$$(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^m \xi_\alpha(t) \overline{\eta_\alpha(t)} dt, \quad \xi, \eta \in H.$$

Определим на соответствующем плотном множестве в H самосопряженный оператор L_0 : $L_0 \xi(t) = ((n-1)/2)^2 + t^2 \xi(t)$. Обозначим через $\nu_\beta(F)$ лебегову меру сечения области $g_\beta^{-1}F$ гиперплоскостью $y = Y$ с достаточно большой постоянной $Y > 0$. Далее для любой функции $f \in L_2(F, \mu)$ определим преобразование U : $f \rightarrow \xi$ формулой

$$\xi_\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu_\beta(F)}} \int_F E^\beta\left(z, \frac{n-1}{2} + it\right) f(z) d\mu(z), \quad \beta = 1, \dots, m,$$

где $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)\}$. Пусть Q — проектор на подпространство дискретного спектра оператора $\bar{L}$ в $L_2(F, \mu)$; E, E_0 — единичные операторы в $L_2(F, \mu)$ и H соответственно.

Теорема 3. Преобразование U изометрически отображает $L_2(F, \mu)$ на все H , причем $UU^* = E_0$, $U^*U = E - Q$, $U\varphi(\bar{L}) = \varphi(L_0)U$, где φ — любая измеримая ограниченная функция на полуоси $[0, \infty)$.

Полученные результаты позволяют обобщить формулу следа Сельберга на рассматриваемый случай. Любой интегральный оператор K_0 в пространстве $L_2(S, \mu)$, инвариантный относительно G , является функцией $h(\lambda)$ от оператора L . Его ядро $k(z, z')$ есть функция $k(u)$ от инварианта пары точек u . Функции $h(\lambda)$ и $k(u)$ связаны простым преобразованием, которое мы называем преобразованием Сельберга. Пусть $g \in \Gamma$, введем следующие обозначения: $\{g\}_\Gamma$ — класс сопряженных элементов в Γ , D_g — фундаментальная область в пространстве S централизатора элемента g в Γ . Как известно из работ ^(1, 2), в случае дискретной группы с компактной фундаментальной областью формула следа Сельберга имеет вид

$$\sum_i h(\lambda^i) = \sum_{\{g\}_\Gamma} \int_{D_g} k(u(z, gz)) d\mu(z). \quad (1)$$

В этой формуле λ^i пробегает множество всех собственных чисел оператора $\bar{L}$, а g — множество представителей всех классов сопряженных элементов в Γ , т. е. эллиптических, гиперболических, локсодромических и единично-

го. В нашем случае Γ , кроме перечисленных, содержит параболические классы сопряженных элементов, т. е. такие классы, которые имеют представителей в подгруппах Γ_α , $\alpha = 1, \dots, m$. В соответствии с этим формула модифицируется, и в правой части (1) появляются новые члены.

Предположим сначала, что кроме 1) и 2), Γ удовлетворяет условию $g_\alpha^{-1} \Gamma g_\alpha \cap P = g_\alpha^{-1} \Gamma g_\alpha \cap N$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Это выполняется, например, в случае конгруэнц-подгруппы степени ≥ 3 группы $SL(n+1, \mathbb{Z}) \cap G$. Воспользуемся обозначениями $\Psi(z) = \Gamma'(z) / \Gamma(z)$, γ — постоянная Эйлера.

Кроме этого, обозначим через $g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iur} h(r) dr$ и введем постоян-

ную c , которую определим следующим образом. Пусть $z = \{y, x\} \in S$, обозначим через $\|x\|$ обычную евклидову норму вектора $x \in R^{n-1}$. Далее, пусть g пробегает множество представителей параболических классов из Γ_α . Упорядочим это множество по неубыванию $\|z - gz\|$. Заметим, что $z - g_1 z = \xi_1 \in R^{n-1}$ не зависит от точки z . Определим c как предел

$$c = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{(n-1)/2}} \frac{v_\alpha(F)}{\|\xi_i\|^{n-1}} - \ln \frac{\|\xi_{i+1}\|}{\|\xi_i\|} \right\} - m \ln \|\xi_1\|.$$

Новые члены в правой части формулы следа (1) имеют вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \operatorname{Tr} \left[S^{-1} \left(\frac{n-1}{2} + ir \right) S' \left(\frac{n-1}{2} + ir \right) \right] dr + \frac{m}{2} \left(\Psi \left(\frac{n-1}{2} \right) - \gamma \right) \times \\ \times g(0) + cg(0) - \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \Psi(1 + ir) dr + \frac{h(0)}{4} \left(m - \operatorname{Tr} S \left(\frac{n-1}{2} \right) \right).$$

В общем случае подгруппы Γ_α содержат элементы конечного порядка и правая часть формулы следа будет зависеть от дискретной группы. В качестве примера рассмотрим случай $n = 3$, $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) / \mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ — целые гауссовы числа. Фундаментальная область F имеет одну параболическую вершину, а подгруппа Γ_1 содержит элементы второго порядка. Правая часть формулы следа (1) для этой группы содержит новые члены

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{S'(1+ir)}{S'(1+ir)} dr + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{8} \ln 2 - \gamma + c \right) g(0) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \Psi(1 + \\ + ir) dr + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \left\{ \Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{ir}{2} \right) - \Psi \left(1 + \frac{ir}{2} \right) \right\} dr + \frac{h(0)}{4} (1 - S(1)).$$

Приведенные формулы справедливы для функций $h(r) \equiv h(\lambda)$, $\lambda = ((n-1)/2)^2 + r^2$, удовлетворяющих следующим условиям: $h(r)$ — аналитические в полосе $|\operatorname{Im} r| < (n-1)/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и $h(r) = O((1 + |r|^2)^{-n/2-\varepsilon})$ в этой полосе. Кроме этого, если ряды Эйзенштейна имеют полюс в точке $s = (n-1)/2$, то функции $h(r)$ должны обращаться в нуль в этой точке с соответствующей кратностью. Для доказательства всех этих фактов вычисляется асимптотика правой части модифицированной формулы следа при приближении области F компактными подобластями. Доказательство таким методом формулы для случая верхней полуплоскости было любезно сообщено автору проф. Л. Д. Фаддеевым.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Л. Д. Фаддееву за указание темы и внимание к настоящей работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Selberg, Indian J. Math. Soc., **20**, 47 (1956). Сб. пер. Математика, **1**, № 4, 3 (1957). ² A. Selberg, Proc. of the 15th Scandinavian Congress, Oslo, 1968, p. 177. ³ A. Selberg, Proc. of the 15th Scandinavian Congress, Oslo, 1968, p. 99. ⁴ Л. Д. Фаддеев, Тр. Московск. матем. общ., **17**, 323 (1967).