Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 2

УДК 532.516 ГИДРОМЕХАНИКА

В. В. ПУХНАЧЕВ

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДВИЖЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 V 1971)

1. Известны лишь немногие примеры точных решений уравнений Навье — Стокса, описывающих течения со свободными границами: стекание по наклонной плоскости слоя жидкости постоянной толщины под действием силы тяжести, вращение как твердого тела жидкой пленки на поверхности круглого вращающегося цилиндра, симметричное схлопывание сферического пузырька в безграничной жидкости и некоторые другие. Можно заметить, что все эти решения являются инвариантными относительно некоторых групп преобразований ([1]). Представляет интерес изучение всего класса инвариантных решений уравнений Навье — Стокса, описывающих течения со свободными границами. В данной работе проводится систематический анализ таких решений.

2. Общей теории вязких течений со свободными границами пока не существует. Имеется ряд приближенных моделей таких течений. Это, главным образом, линейные модели: линейная теория гравитационных волн ([2–4]), колебания вязкой жидкости в сосуде ([5–7]), устойчивость течения по наклонной плоскости ([8–10]), устойчивость пленки на поверхности вращающегося цилиндра ([11]). В ряде работ изучение вязких течений со свободной границей проводилось в рамках гидравлического приближения ([12, 13]), методами пограничного слоя ([14, 15]), методом узких полос ([16, 17]).

3. Запишем в общепринятых обозначениях уравнения Навье — Стокса (массовые силы отсутствуют)

$$v_t \cdot v\cdot\nabla v = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta v,\qquad \nabla\cdot v = 0. \tag{1}$$

Пусть $F(x, t) = 0$ есть уравнение свободной границы. Кинематическое и динамическое условия на свободной границе имеют вид

$$dF/dt \equiv F_t + v\cdot\nabla F = 0,\qquad T\cdot\nabla F \equiv (-pI + 2\rho\nu D)\cdot\nabla F = 0. \tag{2}$$

Здесь I — единичный тензор, T — тензор напряжений, D — тензор скоростей деформаций, $2D_{ij} = \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$, $i, j = 1, 2, 3$.

Известно, что уравнения (1) допускают следующие операторы ([18]):

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t},\quad X_k = \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$X_{kl} = x_l\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial}{\partial x_l} + v_l\frac{\partial}{\partial v_k} - v_k\frac{\partial}{\partial v_l}\quad (k<l); \tag{3}$$

$$Y_k = t\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k}\quad (k, l = 1, 2, 3);$$

$$Z = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - v_i\frac{\partial}{\partial v_i}\right) - 2p\frac{\partial}{\partial p}.$$

Эти операторы образуют алгебру Ли. Ей соответствует локальная группа Ли G_{11} преобразований восьмимерного пространства переменных x, t, v, p. (Мы опускаем здесь бесконечную часть основной группы системы (1), наличие которой было замечено А. А. Бучневым ([19]). Отметим, однако, что в условии формулируемой ниже теоремы заменить группу G_{11} более широкой нельзя.)

При изучении инвариантных решений задач со свободной границей для системы (1) возникает вопрос об инвариантности условий (2) на свободной границе. Введем наряду с x, t, v, p переменную λ и расширим группу G_{11} до группы $\overline{G}_{11}$ преобразований переменных x, t, v, p, λ, так что x, t, v, p подвергаются преобразованиям группы G_{11}, а λ преобразуется тождественно. Если группу $\overline{G}_{11}$ продолжить на первые производные, считая v, p, λ функциями x, t, то оказывается, что выражение $d\lambda/dt$ умножается на число при преобразованиях продолженной группы, а выражение $T\cdot\nabla\lambda$ будет вектором относительно этой группы.

Рассмотрим подгруппу H порядка $r \leqslant 3$ группы G_{11}. Пусть I_k, $k = 1, \ldots, n = 8 - r$, — полный набор функционально независимых инвариантов H, причем $I_5, \ldots, I_n$ не содержат v, p — искомых функций в системе (1). Будем рассматривать только такие подгруппы H, что якобиан системы функций $I_1, \ldots, I_4$ по переменным v_i, p отличен от нуля (необходимое условие существования инвариантного H-решения системы (1)).

Пусть уравнение $F(x, t) = 0$ определяет неособое инвариантное многообразие [1] группы H. Это означает, что $F = \Phi[I_5(x, t), \ldots, I_n(x, t)]$ с некоторой функцией Φ. Подставляя $F = \Phi$ в условия (2), будем иметь

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=5}^{n} \frac{dI_k}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial I_k}, \quad T\cdot\nabla F = \sum_{k=5}^{n} (T\cdot\nabla I_k)\frac{\partial\Phi}{\partial I_k}. \tag{4}$$

Будем теперь в качестве дополнительной переменной λ последовательно выбирать $\lambda = I_k$ $(k = 5, \ldots, n)$. Это возможно, поскольку I_k преобразуются тождественно относительно H. Выражения dI_k/dt под действием преобразования из H умножаются на одно и то же число, а выражения $(T\cdot\nabla I_k)_i$ преобразуются как компоненты вектора, причем закон преобразования не зависит от k. Отсюда заключаем, что условия (4), выполненные на поверхности $\Phi[I_5(x, t), \ldots, I_n(x, t)] = 0$, инвариантны относительно H. Нами доказана

Теорема. *Если свободная граница $F(x, t) = 0$ инвариантна относительно подгруппы H группы G_{11}, то условия* (2), *выполненные на этой поверхности, также инвариантны относительно H.*

Очевидно, подобная теорема верна и в плоском случае с заменой G_{11} на группу G_7 с базисными операторами (3), где $i, k, l = 1, 2$.

Отметим, что условия (2), как правило, еще не определяют хорошо поставленную краевую задачу для системы (1). Если дополнительные условия (например, начальные условия, условия на границе жидкости и твердого тела, условия, задающие расход, циркуляцию и т. д.) также инвариантны относительно H, то можно говорить об инвариантной краевой задаче со свободной границей для системы (1).

4. Применим теорему п. 3 к анализу инвариантных решений задач со свободной границей для системы (1) в плоском случае.

Сначала рассмотрим простой пример [20]. Пусть группа $H \subset G_7$ порождена операторами X_0, Z (кратко: $H = H\langle X_0, Z\rangle$). Ей соответствует инвариантное решение $v_r = \nu r^{-1}u(\theta)$, $v_\theta = 0$, $p = \rho\nu^2 r^{-2}q(\theta)$ (r, θ — полярные координаты на плоскости x_1, x_2). Подставляя эти выражения в уравнения (1), получим систему обыкновенных уравнений для u, q

$$u'' + u^2 + 2q = 0, \quad 2u' - q' = 0. \tag{5}$$

Потребуем, чтобы линии $\theta = 0$, $\theta = \alpha$ были свободными границами. Прямые $\theta = 0$, $\theta = \alpha$ — инвариантные многообразия H, поэтому условия (2) на них с необходимостью записываются в терминах инвариантов H:

$$u' = 0, \quad 2u - q = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad \theta = \alpha. \tag{6}$$

Будем считать заданным расход жидкости через начало координат Q. Условие расхода также инвариантно и может быть записано в виде

$$\int_0^\alpha u(\theta)\,d\theta = R. \tag{7}$$

Безразмерный параметр $R = Q/\nu$ играет роль числа Рейнольдса.

Сформулируем задачу I: при заданном R найти функции u, q и число $\alpha \in (0, 2\pi)$ так, чтобы удовлетворялись соотношения (5)—(7). Наряду с ней рассмотрим задачу II: найти функции u, q и параметр α так, чтобы удовлетворялись соотношения (5), (7), условие (6) при $\theta = \alpha$ и условие $u(0) = 0$. Решение задачи II описывает течение жидкости, ограниченной твердой стенкой $\theta = 0$ и свободной границей $\theta = \alpha$, с заданным расходом в начале координат.

Решения задач I и II являются аналогами известного решения Гамеля — Джеффри ([21], [22]) (течение в плоском диффузоре). Однако если в задаче Гамеля — Джеффри параметры α (угол раствора диффузора) и R независимы, то в нашем случае между ними имеется связь.

Исследование задачи I приводит к результату: при $R \leqslant -8\pi$, $R > 0$ эта задача не имеет решений; при $-8\pi < R \leqslant 0$ существует от одного до семи (в зависимости от R) решений задачи I. Что касается задачи II, то она разрешима (вообще говоря, неоднозначно) лишь при $R > R_1 \approx \approx -22{,}65$. При $R \geqslant R_2 \approx 1{,}66$ ее решение единственно. Если $R \to \infty$, то $\alpha = (2R)^{-1} + O(R^{-2})$.

Рассмотренное решение представляет пример инвариантного решения ранга 1 системы (1), т. е. решения, определяемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Всякому такому решению соответствует некоторая двухпараметрическая подгруппа $H \subset G_7$. Неподобным подгруппам H отвечают существенно различные инвариантные решения. Вычисления показывают, что имеется 11 различных типов инвариантных решений ранга 1 системы (1) в плоском случае. Каждое из них находит интерпретацию в виде некоторого (иногда тривиального) течения со свободной границей. Некоторые решения упоминались в п. 1.

Рассмотрим теперь инвариантные решения ранга 2. Эти решения строятся на однопараметрических подгруппах группы G_7 и определяются из систем с двумя независимыми переменными. Любая однопараметрическая подгруппа группы G_7 подобна одной из групп, порожденных операторами

$$1)\ X_1,\quad 2)\ X_{12},\quad 3)\ Y_2 + \beta X_1,\quad 4)\ X_0,\quad 5)\ X_0 + Y_2,\quad 6)\ X_0 + X_{12},\quad 7)\ Z + \beta X_{12} \tag{8}$$

(β — произвольная постоянная). В соответствии с (8) имеется 7 типов инвариантных решений ранга 2. Рассмотрим их отдельно.

Инвариантное решение относительно подгруппы $H\langle X_1\rangle$ описывает «слоистое» течение, в частности, прямолинейное неустановившееся движение, ограниченное стенкой $x_2 = 0$ и свободной границей $x_2 = \text{const} \neq 0$.

Более содержательный пример дает решение относительно подгруппы $H\langle X_{12}\rangle$. Это решение может быть интерпретировано как вращательно-симметричное движение вращающегося вязкого кольца со свободной границей. Поле скоростей имеет вид $v_r = \varphi(t) r^{-1}$, $v_\theta = v(r, t)$, уравнения свободных границ: $r = R_{1,2}(t)$. Функции $v(r, t)$, $\varphi(t)$, $R_{1,2}(t)$ подлежат определению из системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) - \frac{\varphi}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right), \quad \frac{dR_i}{dt} = \frac{\varphi}{R_i}, \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

$$\left(\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{d\varphi}{dt} + \left(2\nu\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{v^2}{r}\,dr$$

при $t > 0$, $R_1(t) < r < R_2(t)$ с начальными и краевыми условиями

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad R_i(0) = R_{i0}, \quad i = 1, 2,$$

$$v(r,\ 0) = v_0(r),\ 0 < R_{10} \leqslant r \leqslant R_{20}, \tag{10}$$
$$\partial v / \partial r - v / r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_i(t), \quad i = 1,\ 2, \quad t \geqslant 0.$$

Задача (9), (10) изучена В. О. Бытевым ([23]), который доказал ее однозначную разрешимость и исследовал асимптотику решения при $t \to \infty$.

Решение относительно подгруппы $H\langle Y_2 + \beta X_1\rangle$ допускает такую интерпретацию. В момент $t = 0$ жидкость занимала полосу $a_{10} < x_2 < a_{20}$ и имела поле скоростей $v_1 = f(x_2)$, $v_2 = \beta^{-1}x_1 + v_0$ (a_{10}, a_{20}, v_0 — постоянные, f — произвольная функция x_2). Границы полосы свободны при $t > 0$. Решение строится эффективно. Уравнения свободных границ имеют вид $x_2 = \beta^{-1}tx_1 + a_i(t)$, $i = 1,\ 2$. Здесь $a_2(t) = a_1(t) + a_{20} - a_{10}$, $a_1(t) = a_{10} + v_0 t + \bar{f}t^2 / 2$, $\bar{f}$ — среднее значение $f(x_2)$ на интервале $[a_{10},\ a_{20}]$.

Инвариантные решения, построенные на каждой из остальных четырех подгрупп системы (8), не столь обозримы. Краевые задачи со свободной границей, к которым они приводят, по-видимому, еще не подвергались обстоятельному изучению. Мы ограничимся лишь вопросом об интерпретации этих решений.

Подгруппе $H\langle X_0\rangle$ отвечают стационарные решения системы (1).

Подгруппа $H\langle X_0 + Y_2\rangle$ дает решения, стационарные в системе координат, которая движется с постоянным ускорением вдоль оси x_2.

Решения, инвариантные относительно подгруппы $H\langle X_0 + X_{12}\rangle$, описывают стационарные течения в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг оси x_3.

Наконец, подгруппе $H\langle Z + \beta X_{12}\rangle$ соответствуют нестационарные спиральные течения вязкой жидкости. При $\beta = 0$ получаем автомодельные решения системы (1).

5. Аналогичная методика применима к рассмотрению инвариантных задач со свободной границей для трехмерных уравнений Навье — Стокса, для уравнений с ненулевым вектором массовых сил, а также к исследованию частично инвариантных решений системы (1), описывающих течения со свободной границей. Это позволяет изучить следующие задачи: взаимодействие вихревой нити с конической свободной поверхностью (аналог решения М. А. Гольдштика ([24])), стекание слоя тяжелой жидкости по поверхности вертикального цилиндра произвольного сечения, нестационарное течение в жидком слое, ограниченном вращающейся плоскостью и параллельной ей свободной границей, и ряд других.

Автор выражает благодарность Н. Х. Ибрагимову за полезные обсуждения.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
4 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Овсянников, Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1962. [2] Л. Н. Сретенский, Тр. ЦАГИ, № 541 (1941). [3] Н. Н. Моисеев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1, в. 3, 548 (1961). [4] Э. Н. Потетюнко, Л. С. Срубщик, Л. Б. Царюк, ПММ, 34, в. 1, 153 (1970). [5] С. Г. Крейн, ДАН, 159, № 2, 262 (1964). [6] Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, в. 6, 1054 (1966). [7] Ф. Л. Черноусько, Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, Тр. ВЦ АН СССР, М., 1968. [8] П. Л. Капица, ЖЭТФ, 18, в. 1, 3, 1968. [9] T. B. Benjamin, J. Fluid Mech., 2, № 4, 554 (1957). [10] C.-S. Yih, Phys. Fluids, 6, № 3, 321 (1963). [11] C.-S. Yih, Proc. Roy. Soc. A, 258, № 1292, 63 (1960). [12] C. C. Mei, J. Math. and Phys., 45, № 3, 266 (1966). [13] S. H. Smith, J. Eng. Math., 3, № 3, 173 (1969). [14] В. Г. Левич, Физико-химическая гидродинамика, М., 1959. [15] А. Г. Петров, Вестн. Московск. унив., сер. 1, 69 (1971). [16] Ю. П. Иванилов, Журн. вычислит. матем. и матем физ., 1, в. 6, 1061 (1961). [17] D. J. Benney, J. Math. and Phys., 45, № 2, 150 (1966). [18] В. В. Пухначев, Лекции по динамике вязкой несжимаемой жидкости, ч. 1, Новосибирск, 1969. [19] А. А. Бучнев, Сборн. Динамика сплошной среды, в. 7, Новосибирск, 1971. [20] В. В. Пухначев, Информ. бюлл., Численные методы механики сплошной среды, 2, в. 3, Новосибирск, 1971. [21] G. Hammel, Jahrb. Dentsche Math. Ver., 25, 34 (1916). [22] G. B. Jeffery, Proc. Lond. Math. Soc., 14, 327 (1915). [23] В. О. Бытев, Журн. прикл. механ. и техн. физ., в. 3, 82 (1970). [24] М. А. Гольдштик, ПММ, 24, в. 4, 610 (1960).