

Член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД, Д. А. КАЖДАН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОГОМОЛОГИЙ АЛГЕБР ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

1. Обозначения и предварительные сведения. Для начала напомним, что стандартный комплекс $C(\mathcal{G})$ топологической алгебры Ли $\mathcal{G}$ определяется как комплекс $\{C^q(\mathcal{G}), d^q\}$, где $C^q(\mathcal{G})$ есть пространство непрерывных кососимметрических q -линейных вещественных функционалов на $\mathcal{G}$, а $d^q: C^q(\mathcal{G}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{G})$ действует по формуле

$$(d^q L)(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{q+1}) = \\ = \sum_{1 \leq s < t \leq q+1} (-1)^{s+t-1} L([\Lambda_s, \Lambda_t], \Lambda_1, \dots, \hat{\Lambda}_s, \dots, \hat{\Lambda}_t, \dots, \Lambda_{q+1})$$

($L \in C^q(\mathcal{G})$; $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{q+1} \in \mathcal{G}$). Гомологии комплекса $C(\mathcal{G})$ называются когомологиями алгебры $\mathcal{G}$ и обозначаются через $H^*(\mathcal{G}) = \bigoplus_q H^q(\mathcal{G})$.

Пусть M — гладкое (класса C^∞) n -мерное многообразие, $\mathfrak{A}(M)$ — алгебра Ли гладких векторных полей на M . В комплексе $C(\mathfrak{A}(M))$ выделяется диагональный подкомплекс $C_\Delta(\mathfrak{A}(M)) = \{C_\Delta^q, d^q\}$: элемент $L \in C^q(\mathfrak{A}(M))$ принадлежит C_Δ^q , если $L(\Lambda_1, \dots, \Lambda_q) = 0$ для любых векторных полей $\Lambda_1, \dots, \Lambda_q \in \mathfrak{A}(M)$ с непересекающимися в совокупности носителями (подробности см. в ⁽¹⁾). Гомологии комплекса $C_\Delta(\mathfrak{A}(M))$ обозначаются через $H_\Delta^*(\mathfrak{A}(M))$.

Через W_n обозначается алгебра Ли формальных векторных полей в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ (см. ⁽²⁾).

Напомним известные результаты про $H^*(W_n)$ и $H_\Delta^*(\mathfrak{A}(M))$. В ⁽²⁾ установлен изоморфизм между $H^*(W_n)$ и $H^*(X_n; \mathbb{R})$, где X_n — прообраз $2n$ -го остова базы в универсальном $U(n)$ -расслоении. В ^(1, 3) построена спектральная последовательность $H_i(M; \mathbb{R}) \otimes H^q(W_n) \Rightarrow H^{n-i}(\mathfrak{A}(M))$. Настоящая заметка посвящена дальнейшему уяснению связи между $H^*(W_n)$ и $H_\Delta^*(\mathfrak{A}(M))$.

2. Результат. Многообразие M является базой канонического векторного расслоения η со слоем $C^*(W_n) = \bigoplus_r C^r(W_n)$ (координатные функ-

ции этого расслоения индуцируются функциями перехода от одних локальных координат к другим). Дифференциальная форма степени q на M со значениями в η определяется как функция, относящая при $x \in M$, $r \geq 0$ всяким $q - r$ векторам из $T_x M$ элемент степени r из слоя над x и зависящая от этих векторов полилинейно и кососимметрично. Внешний дифференциал $\partial\varphi$ такой формы φ определяется формулой

$$\partial\varphi(\tau_1, \dots, \tau_{q-r+1}) = \\ = \sum_i (-1)^i \partial(\tau_i) \varphi(\tau_1, \dots, \hat{\tau}_i, \dots, \tau_{q-r+1}) + d[\varphi(\tau_1, \dots, \tau_{q-r+1})],$$

где $\partial(\tau_i)$ — дифференцирование в направлении вектора τ_i (расслоение η снабжается естественной канонической связностью, см. конец п. 3), d — дифференциал в комплексе $C^*(W_n)$. Через $\Delta(M)$ обозначим комплекс, составленный из таких форм, имеющих компактный носитель.

Теорема. $H_\Delta^q(\mathfrak{A}(M)) = H^{q+n}(\Delta(M))$ при $q > 0$.

Из этой теоремы видно, что $H_\Delta^*(\mathfrak{A}(M))$ определяется топологическими свойствами касательного расслоения многообразия M . В частности, если многообразие M параллелизуемо, то $H_\Delta^*(\mathfrak{A}(M)) = \bigoplus_{s+l=q+n} H_c^s(M; R) \otimes H^l(W_n)$. Доказательство теоремы использует идеи работы (4).

3 Действия алгебр Ли. Сначала дадим аккуратное определение потом приведем пример. Пусть A — коммутативная топологическая алгебра над $\mathbb{C}$, S — множество ее морфизмов в $\mathbb{C}$. Множество $\mathfrak{A}(S)$ всех векторных полей на S (т. е. дифференцирований алгебры A) является топологическим A -модулем и топологической алгеброй Ли. Говорят, что ядерная алгебра Ли $\mathfrak{G}$ действует на S , или что S является $\mathfrak{G}$ -пространством, если задан некоторый непрерывный гомоморфизм $\varphi = \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A}(S)$. Говорят, далее, что S является главным $\mathfrak{G}$ -пространством, если отображение A -модуля $A \otimes \mathfrak{G}$ в A -модуль $\mathfrak{A}(S)$, заданное формулой $a \otimes g \rightarrow a\varphi(g)$, является изоморфизмом. (В конечномерном случае это означает, что S есть фактор-пространство группы G по дискретной подгруппе. В общем случае это понятие богаче, так как бесконечномерной алгебре, как например W_n , может не соответствовать никакая группа.)

Отметим, что для главного $\mathfrak{G}$ -пространства S является изоморфизмом и естественное отображение $A \otimes_{\mathbb{C}} (A_c^q \mathfrak{G}) \rightarrow A_\Delta^q \mathfrak{G}$, где A_c^q означает q -ю внешнюю, т. е. альтернированную тензорную степень.

Пример. Примем за S пространство $S(M)$ формальных систем координат на M , т. е. положим $S(M) = \varprojlim S_k(M)$, где $S_k(M)$ — многообразие k -струй регулярных отображений $\mathbb{R}^n \rightarrow M$ в точке 0; кольцо A определим как $\varprojlim A_k$, где A_k — пространство гладких комплекснозначных функций на $S_k(M)$; за $\mathfrak{G}$ примем W_n . Действие $\varphi = W_n \rightarrow \mathfrak{A}(S(M))$ определяется так. По элементу $\xi \in W_n$ строим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\xi_t = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Теперь, если $F \in A_k$ и α есть $(k+1)$ -струя отображений $\mathbb{R}^n \rightarrow M$, то положим $[\varphi_k(\xi)F](\alpha) = \frac{d}{dt} F(\alpha \circ \xi_t)|_{t=0}$. Возникают отображения $\varphi(\xi): A_k \rightarrow A_{k+1}$, которые составляют, как в этом легко убедиться, дифференцирование $A \rightarrow A$, т. е., элемент из $\mathfrak{A}(S(M))$; последний мы и принимаем за $\varphi(\xi)$. Можно проверить, что построенное отображение $\varphi = W_n \rightarrow \mathfrak{A}(S(M))$ определяет действие алгебры W_n на $S(M)$ и что относительно этого действия $S(M)$ является главным W_n -пространством. Структура главного однородного пространства позволяет ввести естественную связность в расслоении η (п. 2).

4. Дифференциальные формы на $S(M)$. Формула Маурера — Картана. Дифференциальной формой степени q на S со значениями в линейном топологическом пространстве B называется непрерывная A -линейная кососимметрическая q -форма на $\mathfrak{A}(S)$ со значениями в A -модуле $A \otimes B$.

Пространство всех дифференциальных форм на S со значениями в B обозначим через $\Omega^*(S; B) = \bigoplus_q \Omega^q(S; B)$. Внешний дифференциал $d = \Omega^0(S; B) \rightarrow \Omega^1(S; B)$ определяется формулой

$$d\tau(D_1, \dots, D_{q+1}) = \sum_i (-1)^i D_i \tau(D_1, \dots, \hat{D}_i, \dots, D_{q+1}) + \\ + \sum_{s < t} (-1)^{\frac{s+t-1}{2}} \tau([D_s, D_t], D_1, \dots, \hat{D}_s, \dots, \hat{D}_t, \dots, D_{q+1}) \\ (\tau \in \Omega^q(S; B); D_1, \dots, D_{q+1} \in \mathfrak{A}(S)).$$

Пусть S является главным $\mathfrak{G}$ -пространством. Тогда отображение $\omega: \mathfrak{A}(S) \rightarrow A \otimes \mathfrak{G}$, обратное к отображению $a \otimes g \rightarrow a\varphi(g)$ (см. п. 3), можно рассматривать, как 1-форму на S со значениями в $\mathfrak{G}$.

Предложение 1 (формула Маурера — Картана) $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$, т. е. $d\omega(D_1, D_2) = -[\omega(D_1), \omega(D_2)]$ для любых $D_1, D_2 \in \mathfrak{A}(S)$ (в правой

части последнего равенства коммутатор берется в $A \otimes \mathfrak{G}$; он определяется формулой $[a_1 \otimes g_1, a_2 \otimes g_2] = a_1 a_2 \otimes [g_1, g_2]$.

5. Геометрическое действие алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли, $\{K = \bigoplus K^q, \alpha\}$ — комплекс, дифференциал d которого имеет степень $+1$. Скажем, что определено геометрическое действие алгебры $\mathfrak{G}$ в K (иначе: K есть геометрический $\mathfrak{G}$ -комплекс, или просто $\mathfrak{G}$ -комплекс), если для каждого $\lambda \in \mathfrak{G}$ задано линейное отображение $\bar{\lambda} = K \rightarrow K$ степени -1 такое, что для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{G}$ имеют место равенства

$$1^\circ \quad (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2) = \alpha \bar{\lambda}_1 + \beta \bar{\lambda}_2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C});$$

$$2^\circ \quad \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 = -\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_1;$$

$$3^\circ \quad [\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2] + \bar{\lambda}_1 d \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_2 d \bar{\lambda}_1 + d \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_1 d = 0.$$

Полагая $d(\lambda) = \bar{\lambda} d + d \bar{\lambda}$, получим представление алгебры $\mathfrak{G}$ в эндоморфизмах комплекса K . Однако легко показать, что не всякое такое представление получается этим путем из геометрического действия.

Если K — геометрический $\mathfrak{G}$ -комплекс, то через $K \otimes$ обозначим его подкомплекс, составленный из таких $k \in K$, что $\lambda k = \alpha(\lambda) k = 0$ (иначе: $\lambda k = \bar{\lambda} dk = 0$) для всех $\lambda \in \mathfrak{G}$.

Пример 1. Пусть F — алгебра Ли, $\mathfrak{G}$ — ее подалгебра. Стандартный комплекс $C(F)$ снабжается геометрическим действием алгебры $\mathfrak{G}$ для $f_1, \dots, f_{q-1} \in F, \lambda \in \mathfrak{G}, L \in C^q(F)$ полагаем $(\bar{\lambda} L) (f_1, \dots, f_{q-1}) = L(\lambda, f_1, \dots, f_{q-1})$.

Пример 2. Если S есть $\mathfrak{G}$ -пространство, т. е. задано отображение $\varphi: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A}(S)$ (см. п. 3), то комплекс $\{\Omega^*(S), d\}$ (см. п. 4) снабжается геометрическим действием алгебры $\mathfrak{G}$: для $D_1, \dots, D_{q-1} \in \mathfrak{A}(S), \lambda \in \mathfrak{G}, \tau \in \Omega^q(S)$ полагаем $(\bar{\lambda} \tau) (D_1, \dots, D_{q-1}) = \tau(\varphi(\lambda), D_1, \dots, D_{q-1})$.

Поясним последний пример в конечномерном случае. Если S есть конечномерное многообразие, на котором гладко без неподвижных точек действует группа Ли G , алгебра Ли которой есть $\mathfrak{G}$, то, как легко показать, $(\Omega^*(S)) \otimes \mathfrak{G} = \Omega^*(S/G)$.

В заключение отметим, что если K_1 и K_2 — два $\mathfrak{G}$ -комплекса, то $\text{Hom}(K_1, K_2)$ также снабжается структурой $\mathfrak{G}$ -комплекса. А именно, если $\rho \in \text{Hom}(K_1, K_2)$, то полагаем $(d\rho)(k) = d(\rho(k)) - \rho(dk)$ и $(\bar{\lambda} \rho)(k) = \bar{\lambda}(\rho(k)) - \rho(\bar{\lambda} k)$, где $\bar{\lambda} \in \mathfrak{G}, k \in K_1$.

6. Гомологии диагонального комплекса. Наметим доказательство теоремы из п. 2. Согласно сказанному, комплексы $C(W_n)$ и $\Omega^*(S(M))$ являются W_n -комплексами. Значит, W_n -комплексом является и $K = \text{Hom}(C(W_n), \Omega^*(S(M)))$. Одновременно K является и L_0 -комплексом, где L_0 — подалгебра алгебры W_n , составленная из формальных векторных полей, обращающихся в ноль в точке 0.

Доказываемая теорема вытекает из трех следующих лемм.

Лемма 1. Комплекс K^{W_n} сопряжен с комплексом $C_\Delta(\mathfrak{A}(M))$. В частности, $H_{-q}(K^{W_n}) = [H_\Delta^q(\mathfrak{A}(M))]^*$ при всех q .

Лемма 2. $H_{-q}(K^{L_0}) = [H_{C_\Delta}^{n+q}(\Delta(M))]^*$ при всех q .

Лемма 3. Включение $K^{W_n} \rightarrow K^{L_0}$ индуцирует изоморфизм гомологий.

Лемма 1 доказывается так. Всякий элемент $k \in (K^{W_n})^{-q}$ определяет гомоморфизм $k_q: C^q(W_n) \rightarrow \Omega^q(S(M)) = A$, т. е. элемент из $A \otimes C^q(W_n)^* = A \otimes \Lambda^q(W_n) = \Lambda_\Delta^q(\mathfrak{A}(S(M)))$ (последнее равенство следует из того, что $S(M)$ есть W_n -пространство; см. п. 3). Из $k \in K^{W_n}$ следует, что полученный элемент W_n -модуля $\Lambda_\Delta^q(\mathfrak{A}(S(M)))$ является W_n -инвариантным. Можно показать далее, что пространство W_n -инвариантных элементов из $\Lambda_\Delta^q(\mathfrak{A}(S(M)))$ сопряжено с $C_\Delta^q(\mathfrak{A}(M))$. Таким образом, возникает гомоморфизм $(K^{W_n})^{-q} \rightarrow C_\Delta^q(\mathfrak{A}(M))^*$, который, как это проверяется, является изоморфизмом и в естественном смысле согласован с дифференциалами в комплексах K и $C_\Delta^*(\mathfrak{A}(M))$.

Доказательство леммы 2 основано на том, что алгебре L_0 отвечает бесконечномерная группа Ли (группа формальных диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}$, сохраняющих точку 0). Это позволяет свести вычисление го-

мологий комплекса K^{L_0} к вычислению когомологий фактор-пространства некоторого пространства по действию этой группы.

Наконец, для доказательства леммы 3 в комплексах K^{W_n} и K^{L_0} определяются фильтрации. Первая происходит от фильтрации в $C_\Delta^*(\mathfrak{A}(M))$, построенной в ⁽¹⁾, вторая — от обычной фильтрации Лере в конечных расслоенного пространства $\Delta(M)$. Удастся доказать, что включение $K^{W_n} \rightarrow K^{L_0}$ согласовано с этими фильтрациями и индуцирует изоморфизм вторых членов спектральных последовательностей.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, Функц. анализ, 3, в. 3, 32 (1969). ² И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, Изв. АН СССР, сер. матем., 34 (1970). ³ И. М. Гельфанд, Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. Некоторые вопросы интегральной геометрии. Докл. на конгрессе математиков, 1970. ⁴ И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, Функц. анализ, 4, в. 2, 23 (1970).