Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 2

УДК 519.4:517:513.88+517.54 *МАТЕМАТИКА*

Е. А. ГОРИН

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ, СВЯЗАННЫХ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ В АЛГЕБРАХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 III 1971)

Пусть A — полупростая коммутативная банахова алгебра с единицей над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел, реализованная в соответствии с гельфандовским представлением как алгебра непрерывных функций на компакте X ее максимальных идеалов. Всюду ниже компакт X предполагается связным. Через $\mathfrak{A}_n(A)$ обозначается совокупность уравнений вида

$$w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1)$$

с коэффициентами $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и обратимым дискриминантом. В дальнейшем, говоря об уравнениях, мы будем иметь в виду уравнения класса $\mathfrak{A}_n(A)$. В случае $A = C(X)$ обозначение для класса сокращается до $\mathfrak{A}_n(X)$.

Уравнение класса $\mathfrak{A}_n(A)$ называется разрешимым, если оно обладает n различными решениями, принадлежащими A. При этом решения w_1 и w_2 различны, если $w_1(x) \neq w_2(x)$ при всех $x \in X$.

Вопрос о разрешимости уравнений класса $\mathfrak{A}_n(X)$ подробно рассмотрен в (¹), где он сводится к чисто топологическому при помощи простой конструкции (которую здесь удобно воспроизвести).

Обозначим через B_n совокупность полиномов степени n с постоянными комплексными коэффициентами, отличным от 0 дискриминантом и со старшим коэффициентом 1. Множество B_n наделяется топологией, индуцированной естественным вложением в $\mathbf{C}^n$. Далее, E_n — совокупность упорядоченных наборов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ комплексных чисел, для которых $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$; это множество также наделяется топологией, индуцированной вложением в $\mathbf{C}^n$. Имеется накрывающее отображение $p\colon E_n \to B_n$, сопоставляющее точке $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n$ полином $\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n$, корнями которого служат $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

С каждым уравнением класса $\mathfrak{A}_n(X)$ теперь ассоциируется отображение $f\colon X \to B_n$, причем уравнение, соответствующее отображению f, тогда и только тогда разрешимо, когда существует такое отображение $g\colon X \to E_n$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & E_n \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & B_n \end{tikzcd} \qquad (2)$$

коммутативна. Мы не будем в дальнейшем различать уравнение класса $\mathfrak{A}_n(X)$ с ассоциированным с ним отображением f.

Хорошо известно (см., например, (²), стр. 102), что если коэффициенты уравнения (1) принадлежат алгебре A и если это уравнение имеет непрерывное решение, то такое решение само является элементом алгебры. В частности, если все уравнения класса $\mathfrak{A}_n(X)$ разрешимы, то разрешимы и все уравнения класса $\mathfrak{A}_n(A)$. Естественно возникает вопрос относительно обращения этого предложения: верно ли, что из разрешимости всех уравнений класса $\mathfrak{A}_n(A)$ при некоторой алгебре A, пространством максимальных идеалов которой служит компакт X, вытекает разрешимость всех уравнений класса $\mathfrak{A}_n(X)$? Хотя мы не знаем полного ответа на этот вопрос, мы покажем, что ответ оказывается отрицательным, если вместо всех уравнений рассматривать уравнения с отмеченной точкой (см. ниже). Кроме того, ответ оказывается отрицательным в простейшем классе топологических алгебр функций.

Сформулированный вопрос тесно связан с проблемой гомотопической классификации уравнений класса $\mathfrak{A}_n$, поскольку два гомотопных в $\mathfrak{A}_n(X)$ уравнения разрешимы одновременно.

По теореме Аренса — Ройдена, каждое двучленное уравнение класса $\mathfrak{A}_n(X)$ гомотопно в этом классе двучленному уравнению из $\mathfrak{A}_n(A)$. Отсюда легко следует, что то же верно в отношении общих квадратных уравнений. Оказывается, что для уравнений степени $n = 3$ это уже не так. Построение примера основано на следующей лемме, которая является простым следствием теоремы Монтеля о нормальности семейства аналитических функций, выпускающих два значения.

Лемма 1. *Не всякое непрерывное отображение кругового кольца $r < |\zeta| < R$ в комплексную плоскость без двух точек (например, 0 и 1) гомотопно в классе таких отображений отображению, задаваемому аналитической функцией.*

Фактически можно доказать больше: среди «сложных» отображений лишь конечное множество классов содержит аналитические отображения (вряд ли имеет смысл уточнять формулировку).

Пример 1. Пусть $X = \{\zeta: 0 < r \leqslant |\zeta| \leqslant R < \infty\}$ и A — замкнутая подалгебра в $C(X)$, состоящая из функций, аналитических внутри X. По лемме 1, имеется непрерывное отображение h компакта X в комплексную плоскость без точек 0 и 1, не гомотопное в этом классе никакому аналитическому отображению. Рассмотрим уравнение $w(w-1)(w-h) = 0$. Поскольку это уравнение разрешимо, всякое гомотопное ему уравнение также разрешимо. Отсюда легко следует, что предположение о гомотопности этого уравнения некоторому уравнению из $\mathfrak{A}_3(A)$ приводит к противоречию с выбором h.

Теперь переходим к построению основных примеров. Фиксируем точку $x_0 \in X$ и точку $b_0 \in B_n$. Отображение типа f: $(X, x_0) \to (B_n, b_0)$ будем называть уравнением с отмеченной точкой. Нетрудно показать, что если всякое уравнение класса $\mathfrak{A}_n(X)$ с отмеченной точкой разрешимо, то разрешимо и любое уравнение этого класса. Мы увидим, что из одной только разрешимости всех уравнений класса $\mathfrak{A}_n(A)$ с отмеченной точкой, вообще говоря, не следует разрешимость всех уравнений класса $\mathfrak{A}_n(X)$. Построению примера предшествуют некоторые предложения, представляющие, быть может, самостоятельный интерес.

Дискриминант уравнения типа (1) будем обозначать через d. Пусть $\mathrm{Hol}\,(\mathbf{C}_0)$ — алгебра функций, голоморфных на многообразии $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Лемма 2. *Если коэффициенты уравнения* (1) *принадлежат* $\mathrm{Hol}\,(\mathbf{C}_0)$, *причем $a_1 = 0$ и $d = 1$, то все коэффициенты этого уравнения постоянны.*

Доказательство. Переходя, если необходимо, к $n!$-листному накрытию, можем считать, что уравнение разрешимо. Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — набор решений уравнения. По теореме Пикара при $i > 2$ функции

$$(w_i - w_1) \,/\, (w_2 - w_1)$$

обязаны быть постоянными. Добавляя к этим соотношениям еще два, вытекающих из условий $a_1 = 0$ и $d = 1$, получим, что все w_i — константы. Лемма доказана.

Следствие. *Если коэффициенты уравнения* (1) *принадлежат* $\mathrm{Hol}(\mathbf{C}_0)$ *и если дискриминант этого уравнения допускает извлечение корня степени $n(n-1)$, то это уравнение разрешимо.*

Действительно, такое уравнение путем замены неизвестного сводится к уравнению, удовлетворяющему условиям леммы 2.

Пусть $t > 1$ и $K_t = \{\zeta: t^{-1} \leqslant |\zeta| \leqslant t\}$. Обозначим через A_t замкнутую подалгебру в $C(K_t)$, состоящую из функций, голоморфных внутри K_t. Фиксируем некоторую точку $b_0 \in B_n$.

Лемма 3. *Для любого n существует такое $t_0(n)$, что при $t \geqslant t_0(n)$ разрешимо всякое уравнение f: $(K_t, 1) \to (B_n, b_0)$ класса $\mathfrak{A}_n(A_t)$ с $d = 1$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется семейство неразрешимых уравнений f_t: $(K_t, 1) \to (B_n, b_0)$ с $t \to \infty$, удовлетворяющих условиям леммы. Не ограничивая общности, можно дополнительно предположить, что $a_1 = 0$ для всех уравнений семейства.

Переходя (как в лемме 2) к накрытию и используя теорему Монтеля, мы обнаружим, что семейство нормально. Кроме того, значения f_t при $\zeta = 1$ фиксированы, и поэтому наше семейство фактически компактно.

То обстоятельство, что некоторое уравнение f_t неразрешимо в точности, означает, что при обходе окружности $|\zeta| = 1$ происходит нетривиальная перестановка корней (уравнений с числовыми коэффициентами). Так как группа перестановок конечна, мы можем предположить, что для всех уравнений нашего семейства происходит одна и та же перестановка. Переходя теперь к пределу при $t \to \infty$ и используя при этом отмеченную выше компактность, мы обнаружим неразрешимое уравнение класса $\mathfrak{A}_n(\mathrm{Hol}\,(\mathbf{C}_0))$ с $d = 1$. Но существование такого объекта противоречит следствию из леммы 2. Доказательство закончено.

Теорема. *Пусть G — группа с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений.*

Тогда существует такой конечный комплекс с отмеченной точкой (X, x_0) и такая замкнутая подалгебра A в $C(X)$, пространством максимальных идеалов которой служит X, что 1) $\pi_1(X) = G$, 2) всякое уравнение f: $(X, x_0) \to (B_n, b_0)$ класса $\mathfrak{A}_n(A)$ с $d = 1$ разрешимо. Если при этом группа G не имеет нетривиальных гомоморфизмов в группу $\mathbf{Z}$ целых чисел, то разрешимым можно считать любое уравнение класса $\mathfrak{A}_n(A)$ с отмеченной точкой.

Доказательство. Заметим, что если $G = \mathbf{Z}$, то в качестве X можно использовать K_t с $t \geqslant t_0(n)$, а в качестве A — алгебру A_t. В общем случае рассмотрим букет окружностей S_i в количестве, равном числу образующих группы G, и, в соответствии со стандартной конструкцией, заклеим их пленками, чтобы получить (двумерный) комплекс с фундаментальной группой G. Рассмотрим далее, такое же количество круговых колец K_t с $t \geqslant t_0(n)$ и отметим на каждом из них единичную окружность. Отождествим полученные окружности с окружностями S_i так, чтобы точки $\zeta = 1$ попали в отмеченную точку x_0 букета. Полученный комплекс обозначим через X. Ясно, что $\pi_1(X) = G$. Пусть A — замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, состоящая из функций, аналитических внутри «полей» K_t. Легко видеть, что X совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры A. Разрешимость уравнений, отмеченных в пункте 2), вытекает из леммы 3. Если дополнительно $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z}) = 0$, то для построенного комплекса $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$, и, следовательно, разрешимы все двучленные уравнения класса $\mathfrak{A}_n$. В таком случае произвольное уравнение легко приводится к уравнению с $d = 1$. Теорема доказана.

Вернемся к диаграмме (2). Известно, что фундаментальной группой пространства B_n служит группа $B(n)$ кос Артина из n нитей. Отсюда следует [1], что в случае конечного комплекса X для разрешимости всех уравнений класса $\mathfrak{A}_n(X)$ необходимо и достаточно, чтобы группа $\pi_1(X)$ не имела нетривиальных гомоморфизмов в группу $B(n)$.

Пример 2. Пусть G — коммутант группы $B(n)$, $n \geqslant 5$. Группа G не имеет нетривиальных гомоморфизмов в $\mathbf{Z}$ и является конечноопределенной группой [1]. Используя доказанную теорему, мы получаем пример алгебры A, в которой разрешимы уравнения класса $\mathfrak{A}_n(A)$ с отмеченной точкой. Вместе с тем, группа $\pi_1(X)$ в данном случае нетривиальна и естественно вложена в $B(n)$. Поэтому, в силу сказанного выше, не все уравнения класса $\mathfrak{A}_n(X)$ разрешимы. Добавим еще, что уравнения класса $\mathfrak{A}_1(X)$ окажутся разрешимыми, так как при $n \leqslant 4$ из $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z}) = 0$ вытекает отсутствие нетривиальных гомоморфизмов в $B(n)$.

З а м е ч а н и е. Используя вместо леммы 3 лемму 2, нетрудно на том же пути указать пример такой т о п о л о г и ч е с к о й алгебры на бесконечном комплексе X, в которой разрешимы в с е у р а в н е н и я классов $\mathfrak{A}_n$, но в $C(X)$ на спектре этой алгебры, вообще говоря, нет разрешимости уравнений выше 4-й степени.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Г о р и н, В. Я. Л и н, Матем. сборн., 78, 4, 579 (1969). [2] Л. Х ё р м а н д е р, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, М., 1968.