

УДК 517.392+518.12

МАТЕМАТИКА

М. Д. РАМАЗАНОВ

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЙ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В $\tilde{W}_2^m(\Omega)$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 VI 1971)

1°. С. Л. Соболевым ⁽¹⁾ было установлено существование асимптотически оптимальных кубатурных формул с регулярным пограничным слоем над пространством $\tilde{L}_2^m(\Omega)$, $2m > n$. Объясним этот результат подробнее.

Пусть $\tilde{L}_2^m$ — гильбертово пространство периодических функций n действительных переменных

$$f(x) = \sum_s f_s \exp(i2\pi s x), \quad s = (s_1, \dots, s_n), \quad s_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

с конечной нормой

$$\|f\|_m = \left(\sum_s |f_s|^2 |s|^{2m} \right)^{1/2}. \quad (*)$$

Элементами $\tilde{L}_2^m$ являются классы функций, определенных с точностью до произвольной аддитивной постоянной; Ω — область с гладкой границей Γ , лежащая внутри единичного куба,

$$\bar{\Omega} \subset Q \equiv \{x, 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, n\}.$$

Пространство $\tilde{L}_2^m(\Omega)$ — множество функций с конечной нормой

$$\|f\|_{m,\Omega} = \inf \|g\|_m \quad (g \in \tilde{L}_2^m, g|_{\Omega} = f).$$

Сопреженным к $\tilde{L}_2^m$ является $\tilde{L}_2^{-m}$ — пространство периодических ортогональных постоянных функционалов $p(x)$ с нормой $\|p\|_{-m}$.

Кубатурной формулой мы здесь называем последовательность по параметру $h \rightarrow 0$ функционалов

$$L_h(x) = h^n \sum_{kh \in \bar{\Omega}} c_k \cdot \delta(x - kh), \quad (1)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j = 0, 1, \dots, N-1$, $N = 1/h$ — целое число (более общее определение см. ⁽¹⁾). Далее $k' = (k_1, \dots, k_{n-1})$, $k = (k', k_n)$, $[r]$ — целая, а $\{r\}$ — дробная часть числа r .

Смысл рассмотрения кубатурных формул в том, что при надлежащем выборе постоянных c_k (зависящих от h) числа $(L_h(x), f(x))$ могут дать хорошее приближение интегралу $\int_{\Omega} f(x) dx$ при $h \rightarrow 0$ и равномерно по

функциям $f(x) \in \tilde{L}_2^m(\Omega)$. Кубатурная формула с регулярным пограничным слоем — это такая последовательность формул вида (1), для которой можно указать не зависящие от h постоянные L и A так, что $|c_k| \leq A$ для всех k , а для точек kh , удаленных от Γ больше, чем на Lh , $c_k \equiv 1$. Функционалом ошибки называется разность

$$l(x, h, \Omega) \equiv \chi_{\Omega}(x) - L_h(x),$$

где $\chi_\Omega(x)$ — характеристическая функция области Ω . Если c_k^0 таковы, что при каждом h функционалы ошибки имеют минимальные по различным наборам c_k нормы, то кубатурная формула называется оптимальной, обозначается $L_h^0(x)$, соответственно $l^0(x, h, \Omega)$. Асимптотически оптимальными называются кубатурная формула $L_h^a(x)$ и функционал ошибки $l^a(x, h, \Omega) \equiv \chi_\Omega(x) - L_h^a(x)$, если

$$\|l^a(x, h, \Omega)\|_{-m} / \|l^0(x, h, \Omega)\|_{-m} \rightarrow 1 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Мы доказываем результаты С. Л. Соболева другим методом и описываем построение нового функционала ошибки, также являющегося асимптотически оптимальным и обладающим регулярным пограничным слоем — см. формулы (3), (3'), (3''), (10), (11), (9), (6).

Функционалы рассматриваются над пространством $W_2^m(\Omega)$, несколько отличающемся от $L_2^m(\Omega)$. А именно, в определении нормы вместо формулы (*) берется $\|f\|_m' = (\sum_s |f_s|^2 (1 + |s|^2)^m)^{1/2}$, норма в сопряженном

пространстве будет обозначаться $\|p\|_{-m}'$. Основное отличие построенного функционала ошибки от ранее известных в том, что для коэффициентов функционала выписана алгебраическая система (11), решение которой может быть получено явно методом последовательных приближений.

2°. Искомую формулу функционала ошибки

$$l^a(x, h, \Omega) = \chi_\Omega(x) - h^n \sum_{kh \in \bar{\Omega}} c_k \delta(x - kh)$$

будем строить по частям, для чего возьмем сначала разбиение единицы $1 = \sum_{j=1}^{2n} \zeta_j(x)$, составленное из периодических периода 1 бесконечно дифференцируемых функций $\zeta_j(x)$ с носителями Ω_j .

Свойство 1. Ω_j такова, что $\Gamma_j = \Omega_j \cap \Gamma$ можно задать уравнением, разрешенным относительно координаты $x_{[(j+1)/2]}$, $x_{[(j+1)/2]} = \varphi_j(x_1, \dots, x_{[(j+1)/2]-1}, x_{[(j+1)/2]+1}, \dots, x_n)$, с достаточно гладкой функцией φ_j . Замена переменной $y_i = x_i$ при $i \neq [(j+1)/2]$,

$$y_{[(j+1)/2]} = x_{[(j+1)/2]} - \varphi_j, \quad (2)$$

переводит область $\Omega \cap \Omega_j$ в область, расположенную в полупространстве $y_{[(j+1)/2]} \leq 0$, если j нечетно, или $y_{[(j+1)/2]} \geq 0$, если j четно.

Можно взять

$$l^a(x, h, \Omega) = \sum_{j=1}^{2n} l_j(x, h, \Omega), \quad (3)$$

где $l_j(x, h, \Omega) = \zeta_j(x) \cdot l^a(x, h, \Omega)$ при $x \in \Omega \cap \Omega_j$.

Так как все $l_j(x, h, \Omega)$ строятся единообразно, опишем построение одного из них, например, $l_{2n}(x, h, \Omega)$. Пусть Ω_{2n}' — область, обладающая свойством 1 и содержащая Ω_{2n} строго внутри себя, $\Omega_{2n} \subset \Omega_{2n}'$. Положим

$$l_{2n}(x, h, \Omega) = \zeta_{2n}(x) \cdot p(x, h), \quad (3')$$

где

$$p(x, h) = \chi_{\Omega \cap \Omega_{2n}'}(x) - h^n \sum_{\substack{k_n h \geq \varphi_{2n}(k'h) \\ \varphi(kh, \Omega \cap \Omega_{2n}') \leq Lh}} b_k \delta(x - kh). \quad (3'')$$

Числа b_k и L остаются пока произвольными.

После замены переменных (2) область $\Omega \cap \Omega_{2n}$ переходит в ω , $\Omega \cap \Omega_{2n}'$ — в ω' , функция $\zeta_{2n}(x)$ — в $\hat{\zeta}(y)$, функционалы $p(x, h)$ и

$l_{2n}(x, h, \Omega) - \text{в}$

$$\hat{p}(y, h) = \chi_{\omega'}(y) - h^n \sum_{k_n \geq 0, \rho(kh, \omega') \leq Lh} b_{k', k_n + [\varphi(k'h)/h]} \delta(y - kh + \{\varphi(k'h)/h\}) \quad (4)$$

и $\hat{l}(y, h, \omega') = \hat{\xi}(y) \cdot \hat{p}(y, h)$ соответственно.

Рассмотрим теперь обобщенную функцию

$$q(y) = \chi_Q(y) - \sum_{k_j = 0, \pm 1, \dots, \pm K} \alpha_k \delta(y - k), \quad (5)$$

в которой коэффициенты α_k найдены из условия ортогональности $q(y)$ всем многочленам до порядка M включительно. Если в формуле (5) добавлено условие $k_n \geq 0$, то соответствующую функцию обозначим $q_+(y)$. Для $q_+(y)$ α_k должны определяться как решения линейной системы уравнений

$$\sum_{\substack{k_j = 0, \pm 1, \dots, K \\ k_n \geq 0}} \alpha_k k_1^{m_1} \dots k_n^{m_n} = 1/(m_1 + 1) \dots (m_n + 1), \quad (6)$$

$$m_j = 0, 1, \dots; \quad m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq M,$$

которая разрешима, если $K \geq M$ (¹).

Мы считаем

$$1/2n < m < M \leq K. \quad (7)$$

Пусть

$$r(y, h, \omega') = \sum_{kh \in \omega'} q_+(y/h - k).$$

Заметим, что

$$r(y, h, \omega') = \chi_{\omega'_h}(y) - h^n \sum_{\rho(kh, \omega') \leq Kh} \alpha_k \delta(y - kh), \quad (8)$$

где $\text{mes}(\omega' \Delta \omega'_n) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и для $kh \in \omega$

$$\alpha_k \equiv \alpha_{k_n} = \sum_{v_n=0}^{\min(K, k_n)} \sum_{v_{n-1}=-K}^K \dots \sum_{v_1=-K}^K \alpha_{v_1 \dots v_n}. \quad (9)$$

Лемма 1. Для любого μ с условием $1/2n < \mu \leq M$ норма функционала (8) имеет оценку

$$0 < C_1 \leq \|r(y, h, \omega')\|'_{-m} / (\text{mes } \omega')^{1/2} \leq C_2 < \infty$$

с некоторыми абсолютными постоянными C_1, C_2 .

Наша цель — выбрать в формуле (4) такие b_k (зависящие от h), чтобы разность функционалов (4) и (8) имела по возможности меньшую норму. Оказывается, мы можем подобрать b_k так, что норма

$$\|r(y, h, \omega') - \hat{p}(y, h)\|_{-m}'$$

будет иметь при $h \rightarrow 0$ порядок нормы $\|r(y, h, \omega')\|_{-m}$. Запишем достаточные для этого условия на b_k . Пусть

$$b_{k', k_n + [\varphi(k'h)/h]} \equiv \beta_k.$$

Требуется определить $\beta_k, \beta_{k,0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,L}$, где $L \geq K$, как решения си-

$$\begin{aligned} \beta_k + \sum_{j=0}^L \beta_{k,j} &= 0, \\ \sum_{j=0}^{\min(k_n, L)} \beta_{k,j} &= -a_{k_n}, \\ \beta_k \gamma^* + \sum_{j=1}^L \beta_{k,j} \cdot j^* &= 0, \quad \gamma \equiv 1 - \{\varphi(k'h)/h\} \quad (k = 1, \dots, K). \end{aligned}$$

Лемма 2. При достаточно большом L система (11) разрешима, причем для $k_n \geq L$ $\beta_k \equiv 1$.

Лемма 3. Функционал ошибки (3), (3'), (3'') при условии (7) имеет при $h \rightarrow 0$ порядок

$$0 < C_1 \leq \|l^a(x, h, \Omega)\|'_{-m} / (\text{mes } \Omega)^{1/2} h^m \leq C_2 < \infty$$

и оптимален по порядку, т. е.

$$[\|l^a(x, h, \Omega)\|'_{-m} / \|l^0(x, h, \Omega)\|'_{-m}] \leq C < \infty.$$

Теорема. Функционал ошибки (3), (3'), (3''), построенный по формулам (10), (11), (9), (6), асимптотически оптимален и обладает регулярным граничным слоем.

Башкирский государственный университет
им. 40-летия Октября
Уфа

Поступило
17 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Л. Соболев, Лекции по теории кубатурных формул, ч. I, II, Новосибирск, 1964, 1965.