Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

В. ИМРИХ, Э. СТОЦКИЙ

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЯХ МЕТРИК В ГРАФЫ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 15 III 1971)

В этой заметке рассматриваются вложения конечных метрик в графы, оптимальные в том смысле, что не существует других реализаций с меньшим числом ребер ([3]). Основной результат состоит в характеристике точек сочленения для оптимальных реализаций, откуда, в частности, вытекают теоремы Е. Смоленского (([2]), § 21), Э. Стоцкого (([3]), теорема 5) и С. Перейра ([1]).

Рассмотрим конечный связный неориентированный граф $G(X, E)$ без петель и кратных ребер, где X обозначает множество вершин и E — множество ребер. На каждом подмножестве $Y \subseteq X$ может быть задана естественная метрика $d_{G, Y}(x, y)$, определяемая как число ребер в кратчайшем пути между вершинами x и y в графе G, причем $x, y \in Y$. В дальнейшем мы будем обозначать через $d_G(x, y)$ расстояние между вершинами x и y в графе G.

Метрика d р е а л и з у е т с я в г р а ф е $G(X, E)$ подмножеством $Y \subseteq X$, если d совпадает с естественной метрикой $d_{G, Y}$. В этом случае граф G с выделенным подмножеством Y называется р е а л и з а ц и е й м е т р и к и d. Если при этом из графа G нельзя удалить ни одного ребра, не нарушив реализуемости метрики d с помощью указанного Y, то говорят, что метрика d р е а л и з у е т с я н а г р а ф е G подмножеством $Y \subseteq X$, и такая реализация называется с т р о г о й р е а л и з а ц и е й. Граф G называется о п т и м а л ь н о й р е а л и з а ц и е й метрики d, если не существует реализации d с меньшим числом ребер, нежели имеется в графе G. Очевидно, что всякая оптимальная реализация является строгой. Понятие оптимальности можно определить аналогичным образом относительно числа вершин или же относительно суммы числа вершин и ребер и т. д. Мы не будем исследовать связи между различными понятиями оптимальности, но отметим, что наши теоремы справедливы также для оптимальности относительно числа вершин. Есть основания предполагать, что в классе строгих реализаций оптимальность по числу ребер равносильна оптимальности по числу вершин (открытая проблема) *.

В дальнейшем мы будем пользоваться понятиями точки (вершины) сочленения и блока согласно определениям А. А. Зыкова (([2]), § 15).

Т е о р е м а 1. *Пусть задана целочисленная метрика d на множестве Y. Каждая оптимальная реализация метрики d имеет точку сочленения тогда и только тогда, когда найдется такое разбиение множества Y на непустые непересекающиеся подмножества Y_1 и Y_2 и такая система натуральных чисел $\{\delta(x)\}$, сопоставленных с элементами Y, что выполнены условия:*

I) $\max\limits_{x \in Y_i} \delta(x) > 0$ *для* $i = 1, 2$;

II) $d(x, y) = \delta(x) + \delta(y)$ *для любых* $x \in Y_1$ *и* $y \in Y_2$;

III) $d(x, y) \leqslant \delta(x) + \delta(y)$ *для* $x, y \in Y_i$, *где* $i = 1, 2$.

Необходимость условий теоремы очевидна. Для доказательства достаточности применяется следующая конструкция: в графе $G(X, E)$, представляющем оптимальную реализацию метрики d, выделяются все крат-

* Неизвестно, существуют ли неизоморфные оптимальные реализации какой-либо метрики.

чайшие пути между вершинами Y_1 и Y_2. На каждом таком пути $P = [x, \ldots, y]$ выделяется точка a_P, удаленная на расстояние $\delta(x)$ от вершины $x \in Y_1$ и на расстояние $\delta(y)$ от вершины $y \in Y_2$. Если в графе G имеется ровно одна точка a_P, то можно показать, что именно она является точкой сочленения графа G. С другой стороны, предположение о наличии не менее двух точек a_P в графе G приводит к противоречию с предположением об оптимальности реализации. Именно, доказывается, что склепывание точек a_P приводит к графу, являющемуся неоптимальной реализацией метрики d.

Следствие 1. *Пусть для метрики d на множестве Y задано разбиение $Y = Y_1 \cup Y_2$ и задана система чисел $\{\delta(x)\}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.*

Тогда всякая оптимальная реализация метрики d имеет точку сочленения a, для которой числа $\delta(x)$ суть расстояния до вершин, соответствующих элементам из Y, причем точка a разделяет множества вершин Y_1 и Y_2.*

Следствие 2. *Если хоть одна строгая реализация метрики d на множестве Y имеет точку сочленения, удаленную от вершин Y на расстояния $\delta(x)$, то каждая оптимальная реализация метрики d имеет точку сочленения с той же системой расстояний $\{\delta(x)\}$ до вершин из Y.*

Следствие 3. *Пусть для метрики d на множестве Y система чисел $\{\delta(x)\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 одновременно при нескольких различных разбиениях $Y = Y_1^{(i)} \cup Y_2^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Тогда в каждой оптимальной реализации метрики d имеется точка сочленения a, удаленная от вершин Y на расстоянии $\delta(x)$, причем точка a разделяет одновременно каждую пару подмножеств $Y_1^{(i)}$ и $Y_2^{(i)}$.

Исходя из следствий 2 и 3, мы можем каждой метрике d однозначно сопоставить совокупность S_d всех точек сочленения каждого графа, являющегося оптимальной реализацией метрики d. В силу следствия 3 степени точек сочленения определены однозначно. Очевидно, что точка сочленения степени k однозначно осуществляет разбиение Y на k минимальных частей $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k$**. Отметим, что процедура, определяющая все точки сочленения для метрики d (иными словами, все подходящие наборы чисел $\{\delta(x)\}$ и соответствующие разбиения Y), является эффективной.

Пусть дана метрика d на множестве Y. Определим ее максимальное расширение d^*, добавив к d все элементы множества S_d, не входящие в Y. Расстояния между вершинами из S_d в метрике d^* определяются естественным образом. Рассмотрим, например, случай, когда к Y добавляются две вершины z_1 и z_2 степени два. Пусть эти две вершины определяются наборами чисел $\{\delta_1(x)\}$ и $\{\delta_2(x)\}$ и разбиениями $Y_1^{(1)} \cup Y_2^{1)}$ и $Y_1^{(2)} \cup Y_2^{(2)}$ соответственно. Если $Y_1^{(1)} = Y_1^{(2)}$, то $d^*(z_1, z_2) = |\delta_1(x) - \delta_2(x)|$, где $x \in Y$ произвольно. Если же $Y_1^{(2)} \subset Y_1^{(1)}$, то $d^*(z_1, z_2) = d(x, y) - \delta_1(y) - \delta_2(x)$, где $x \in Y_1^{(2)}$ и $y \in Y_2^{(1)}$. Случай $Y_2^{(2)} \subset Y_2^{(1)}$ разбирается аналогично.

Определим теперь блок метрики d как наибольшую подметрику метрики d^*, оптимальная реализация которой не имеет точек сочленения. Ясно, что блоки метрики d взаимнооднозначно сопоставляются с блоками любой оптимальной реализации метрики d. Если граф G является оптимальной реализацией метрики d, то каждый блок графа G является оптимальной реализацией соответствующего блока метрики d. Итак, задача нахождения оптимальных реализаций метрики d сводится к нахож-

* Возможно, в частности, $a \in Y_1$ или $a \in Y_2$.

** Если точка сочленения принадлежит Y, то ее произвольно относим к любому Y_i.

нием оптимальных реализаций блоков метрики d. Очевидно, что метрика d имеет единственную оптимальную реализацию тогда и только тогда, когда каждый блок метрики d имеет единственную оптимальную реализацию.

Метрика d называется с о в е р ш е н н о й, если она может быть реализована на некотором графе $G(X, E)$ множеством X. Известно ([3]), что каждая совершенная метрика имеет с точностью до изоморфизма единственную строгую реализацию. Пусть каждый блок метрики d является совершенным. Тогда метрика d имеет единственную оптимальную реализацию*. В частности, метрика d является совершенной, если все расстояния $d(x, y)$ равны единице. Такая метрика строго реализуется на полном графе.

Т е о р е м а 2. *Пусть метрика d строго реализуется на графе G, состоящем только из полных блоков.*

Тогда G является единственной оптимальной реализацией метрики d.

Частным случаем этой теоремы являются упомянутые теоремы Е. Смоленского и Э. Стоцкого.

Отметим, что с помощью теоремы 1 можно дать короткое доказательство следующей теоремы, принадлежащей С. Перейра ([1]).

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы метрика d имела строгую реализацию на дереве, необходимо и достаточно, чтобы каждую подметрику метрики d, содержащую четыре точки, можно было реализовать на дереве.*

Д о с т а т о ч н о с т ь сформулированных условий доказывается по индукции. База индукции — метрики, содержащие по четыре вершины.

Пусть метрика d на множестве Y удовлетворяет условию теоремы. Выберем точку $a \in Y$ так, чтобы $\max\limits_{x \in Y} d(a, x) = \max\limits_{y, z \in Y} d(y, z)$. Рассмотрим разбиение $Y = \{a\} \cup (Y \setminus \{a\})$ и систему чисел $\delta(a) = 1$ и $\delta(x) = d(a, x) - 1$, где $x \in Y \setminus \{a\}$. Для указанного разбиения и чисел $\delta(x)$ условия I) и II) теоремы 1 выполняются очевидным образом. Выберем в Y такую точку b, для которой имеет место $d(a, b) = \max\limits_{x, y \in Y} d(x, y)$, и рассмотрим любые две точки g и h из Y, отличные от a и b. По условию, подметрика d_0 на $\{a, b, g, h\}$ реализуется на дереве D_0. Из рассмотрения дерева D_0 очевидно, что $d(g, h) \leqslant d(a, g) + d(a, h) - 2$, откуда $d(g, h) \leqslant \delta(g) + \delta(h)$. Кроме того, ясно, что $d(g, b) \leqslant d(a, g) + d(a, b) - 2 = \delta(g) + \delta(b)$. Итак, условие III) выполняется.

Согласно следствию 1, точка a в каждой оптимальной реализации $G(X, E)$ метрики d является концевой вершиной. Пусть e является вершиной, соседней с a в графе G. Рассмотрим естественную метрику d' в графе G на множестве $\{e\} \cup (Y \setminus \{a\})$. Метрика d реализуется на дереве тогда и только тогда, когда d' тоже реализуется на дереве. Нетрудно видеть, что метрика d' удовлетворяет условиям теоремы. Поскольку метрика d' имеет оптимальную реализацию с числом блоков, меньшим, чем число блоков метрики d, то, повторяя описанный процесс, мы придем к метрике d'', имеющей меньшую размерность, чем метрика d.

Поступило
15 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. M. S. S i m õ e s P e r e i r a, J. Combinator. Theory, № 6, 303 (1969). [2] A. A. З ы к о в, Теория конечных графов, 1, 1969. [3] Э. С т о ц к и й, Сибирск. матем. журн., 5, № 5, 1203 (1964).

* Можно показать, что метрика d имеет единственную оптимальную реализацию, если каждый ее блок либо является совершенным, либо оптимально реализуется на простом цикле.