Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 5

УДК 519.281 МАТЕМАТИКА

Л. Б. КЛЕБАНОВ, академик Ю. В. ЛИННИК, А. Л. РУХИН

НЕСМЕЩЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ И МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

1. Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$,— вероятностное пространство с семейством вероятностных распределений на нем. Предположим, что по результатам наблюдения $x \in \mathfrak{X}$, подчиняющегося одному из законов P_θ, надо оценить значение заданной функции $\gamma(\theta): \Theta \to \mathfrak{R}_m$, где $\mathfrak{R}_m$ означает множество всех квадратичных матриц размерности $m \times m$ с вещественными элементами.

Если γ^* предложено в качестве оценки неизвестного значения $\gamma = \gamma(\theta)$, то будем задавать потери с помощью матричнозначной функции $w(\gamma^*, \gamma) \in \in \mathfrak{R}_m$ при отношении порядка в множестве $\mathfrak{R}_m$, порождаемого положительной определенностью разности матриц. В дальнейшем рассматриваются лишь функции $w(\gamma^*, \gamma)$, выпуклые по γ^* при каждом значении γ (см. ([1])).

Если $g(x)$ — оценка для $\gamma(\theta)$, т. е. измеримое отображение $\mathfrak{X} \to \mathfrak{R}_m$, то ее риском, отвечающим функции потерь $w(\gamma^*, \gamma)$, является

$$R_\theta(g) = E_\theta w(g(x), \gamma(\theta)).$$

Будем говорить, что оценка $f(x)$ лучше, чем $g(x)$, если при всех $\theta \in \Theta$ матрица $R_\theta(g) - R_\theta(f)$ неотрицательно определена, и строго лучше, чем $g(x)$, если хотя бы при одном θ указанная матрица отлична от нулевой.

Назовем, далее, оценку $f(x)$, принадлежащую некоторому классу K оценок функции $\gamma(\theta)$, оптимальной в этом классе, если она лучше любой оценки $g \in K$.

В основном мы будем рассматривать класс K всех несмещенных оценок (н.о.) с конечной матрицей ковариаций, т. е. оценок $f(x)$, для которых

$$E_\theta f(x) = \gamma(\theta), \quad E_\theta f(x) f^\tau(x) < \infty \tag{1}$$

при всех $\theta \in \Theta$ (здесь τ обозначает знак транспонирования).

Оценка $f(x)$, оптимальная в указанном классе K, будет называться несмещенной оценкой с наименьшим риском (н.о.н.р.).

Н.о.н.р., соответствующая мере качества, порожденной функцией потерь

$$w_1(\gamma^*, \gamma) = (\gamma^* - \gamma)(\gamma^* - \gamma)^\tau \tag{2}$$

(матрицей ковариаций), будет называться несмещенной оценкой с наименьшей матрицей ковариаций (н.о.н.м.к.). Основное внимание в работе уделяется взаимосвязи н.о.н.м.к. с н.о.н.р., соответствующих указанным функциям потерь $w(\gamma^*, \gamma)$.

В случае, когда параметрические функции, оценки и функции потерь принимают вещественные значения (т. е. вместо $\mathfrak{R}_m$ рассматривается R_1), аналогичные исследования были проведены в работах ([2], [3]).

2. Лемма 1. *Для того чтобы f была н.о.н.м.к., необходимо и достаточно, чтобы для любой н.о. нуля χ с условием $E_\theta \chi\chi^\tau < \infty$ было выполнено при всех $\theta \in \Theta$ равенство*

$$E_\theta f \chi^\tau = 0. \tag{3}$$

Доказательство леммы основано на тех же соображениях, что и в скалярном случае (см. ([4])).

Пусть, далее, T_b обозначает класс ограниченных оценок, оптимально оценивающих по мере качества, порожденной матрицей ковариаций (2), свое математическое ожидание. Пусть S_0 — σ-алгебра, порождения T_b, а Y обозначает класс ограниченных несмещенных оценок нуля.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — н.о.н.м.к. и выполнено одно из следующих условий:*

а) *f измерима относительно S_0;*

б) *множество Y плотно по метрике $L_2(P_\theta)$ в множестве несмещенных оценок нуля с конечной матрицей ковариаций, а минимальное симметричное кольцо, порожденное f, плотно в $L_2(\mathfrak{X}, F, P_\theta)$, где F — σ-алгебра, порожденная статистикой f.*

Тогда f — н.о.н.р. для любой матричной функции потерь $w(\gamma^*, \gamma)$, выпуклой по γ^* при каждом фиксированном γ.

Следствие. *Пусть f удовлетворяет условиям теоремы 1, а $\varphi(x)$ — подобная статистика для θ.*

Тогда f и φ стохастически независимы.

В скалярном случае справедлив следующий результат (ср. ([2])).

Теорема 2. *Пусть f — действительная н.о.н.д. такова, что ее распределение определяется единственным образом своими моментами, а U_ε есть класс статистик χ со свойствами*

$$E_\theta \chi = 0, \quad E_\theta \chi^{2+\varepsilon} < \infty, \quad \varepsilon > 0,$$

при всех $\theta \in \Theta$.

Тогда если множество $U = \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon$ плотно в метрике $L_2(P_\theta)$ в множестве несмещенных оценок нуля с конечной дисперсией, то f — н.о.н.р. для любой вещественной функции потерь $w(\gamma^*, \gamma)$, выпуклой по γ^* при любом фиксированном γ.

3. Предыдущие результаты могут быть применены к некоторым характеризациям распределений свойствами оптимальных оценок.

Теорема 3. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из s-мерной совокупности с функцией распределения $F(x^{(1)} - \theta^{(1)}, \ldots, x^{(s)} - \theta^{(s)})$, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — н.о.н.м.к. для $\theta^\tau = (\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(s)})$, удовлетворяющая условиям следствия к теореме 1.*

Тогда $F(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)})$ — функция распределения закона, допускающего систему достаточных статистик для параметра θ ранга s.

Следующий результат является еще одной характеризацией достаточности.

Теорема 4. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — повторная выборка из совокупности с функцией распределения $F(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$, а $f(x)$ — н.о.н.д., удовлетворяющая условиям теоремы 1, и F — σ-алгебра, порожденная ею. Допустим, что распределение $F(x, \theta)$ однозначно определяется своими моментами и для любой пары $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ соответствующие меры взаимно абсолютно непрерывны. Если для всех $k = 1, 2, \ldots$ существует статистика $g_k(x)$, измеримая относительно F и такая, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x, \theta) = E_\theta g_k(x),$$

то f — полная достаточная статистика.

Доказательство этой теоремы основывается на теореме 1 и недавнем результате заметки ([5]).

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 VI 1971

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Лебедев, Ю. В. Линник, А. Л. Рухин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 112 (1971). [2] A. R. Padmanabhan, Sankhya, Ser. A, 32, 1, 107 (1970). [3] Ю. В. Линник, А. Л. Рухин, ДАН, 198, № 3, 527 (1971). [4] E. L. Lehmann, H. Sheffé, Sankhya, 12, 305 (1950). [5] В. Н. Судаков, ДАН, 198, № 2, 301 (1971).

БИБЛИОТЕКА
311757