

П. С. СОЛТАН

СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ЗАДАЧ ШТЕЙНЕРА НА ГРАФЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 17 VI 1971)

1. Для выяснения постановки задачи рассмотрим следующий пример. Населенные пункты $x_1, x_2, \dots, x_n$, для которых потребности в некотором продукте равны соответственно $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ единиц, связаны между собой дорогами $u_1, u_2, \dots, u_m$ таким образом, что пара множеств $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ образует граф $G = (X, U)$. Стоимость перевозки единицы продукта по дороге u_j равна $a(u_j) \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$. Ставится задача нахождения такого пункта $x_* \in X$, что если разместить в x_* производство продукта, то стоимость обслуживания всех пунктов надлежащими количествами продукта будет минимальной. Иначе говоря, речь идет о нахождении такой точки $x_* \in X$, для которой принимает наименьшее значение функционал

$$F(x) = \sum_{i=1}^n p(x_i) \cdot d_a(x, x_i), \quad (1)$$

где $d_a(x, x_i) = \min_{u \in c} \sum a(u)$ по всем цепям c графа G , соединяющим x и x_i .

Рассмотрению этой задачи были посвящены заметки ⁽³⁻⁶⁾. Здесь мы рассмотрим одновременную постановку нескольких задач этого типа на графе G . Это имеет смысл по следующим соображениям. Допустим, например, что побочным продуктом рассматриваемого производства является другой, требующий другие условия перевозки, причем потребности населенных пунктов $x_1, x_2, \dots, x_n$ в этом продукте равны соответственно $q(x_1), q(x_2), \dots, q(x_n)$ единиц, а стоимость перевозки единицы этого продукта по дороге u_j равна $b(u_j) \geq 0$ (здесь, вообще говоря, $a(u_j) \neq b(u_j)$). Для второго продукта получаем аналогичную задачу о минимизации функционала

$$E(x) = \sum_{i=1}^n q(x_i) d_b(x, x_i), \quad (2)$$

где $d_b(x, x_i) = \min \sum b(u)$ по всем цепям c графа G , соединяющих x и x_i .

Естественно возникает вопрос, нельзя ли подобрать такой пункт x_* для размещения производства, что оба функционала $F(x)$, $E(x)$ достигают своего минимума при $x = x_*$. В случае произвольного графа $G = (X, U)$ решения этой задачи, вообще говоря, не существует: множество X_F всех точек $x \in X$, в которых минимизируется функционал $F(x)$, может оказаться непересекающимся со множеством X_E всех точек, минимизирующих $E(x)$.

В этой заметке мы укажем условия, накладываемые на граф G и на функции $a(u)$, $b(u)$, $p(x)$, $q(x)$, участвующие в постановке задачи, при выполнении которых указанные две задачи заведомо имеют совместное решение, т. е. $X_F \cap X_E \neq \emptyset$, причем нахождение хотя бы одного такого решения осуществляется без использования чисел $a(u)$ и $b(u)$. Более того, мы рассмотрим совместную постановку k задач рассматриваемого типа на графе.

2. Итак, пусть на конечном, связном и неориентированном графе $G = (X, U)$ заданы k пар неотрицательных функций:

$$p_\alpha(x), \quad a_\alpha(u); \quad x \in X, \quad u \in U, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k. \quad (3)$$

Эти функции позволяют определить k функционалов на X :

$$F_\alpha(x) = \sum_{x_i \in X} p_\alpha(x_i) d_\alpha(x, x_i), \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (4)$$

где $d_\alpha(x, x_i) = \min_{u \in c} \sum a_\alpha(u)$ по всем цепям c графа G , соединяющим x и x_i .

Множество $M \subset X$ называется выпуклым относительно d_α на X , если из соотношений $x_1, x_2 \in M$, $d_\alpha(x_1, x_2) = d_\alpha(x_1, x_3) + d_\alpha(x_3, x_2)$ следует $x_3 \in M$.

Теперь может быть сформулирована

Задача. Дано множество $M \subset X$, являющееся выпуклым относительно каждой функции d_α , $\alpha = 1, 2, \dots, k$, и функционалы $F_1, F_2, \dots, F_k$ (см. (4)). Найти такую точку $x_* \in X$, в которой все эти функционалы одновременно достигают минимума.

Ниже мы опишем такой класс графов G и функционалов (4), для которых поставленная задача разрешима. Более того, для этого класса графов и функционалов окажется, что нахождение искомой точки x_* может быть осуществлено при помощи алгоритма, не использующего значений функций $a_\alpha(u)$. Для нахождения же множества всех точек минимума функционалов (4) достаточно лишь знать, на каких ребрах графа G функции $a_\alpha(u)$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$, принимают нулевые значения.

Переходим к описанию интересующего нас класса графов и функционалов (4) на них.

3. Будем предполагать, что рассматриваемый граф $G = (X, U)$ реализован на плоскости. Через Φ обозначим множество всех граней, определяемых графом G . На граф G и функции $p_\alpha(x)$, $a_\alpha(u)$ наложим следующие условия.

1°. Для любых $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Phi$, $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, пересечение $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ исчерпывается одним из случаев: $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = x \in X$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = u \in U$.

2°. Каждая грань $\Gamma \in \Phi$ является (вообще говоря, криволинейным) простым четырехугольником.

3°. Если вершина $x \in X$ не лежит на границе бесконечной грани $(^1, ^2)$, то x инцидентна более, чем трем ребрам графа G .

4°. Если $u_1, u_2 \in U$ — противоположные стороны некоторой грани $\Gamma \in \Phi$, то $a_\alpha(u_1) = a_\alpha(u_2)$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$.

Пусть $U_1, U_2, \dots, U_q$ — классы эквивалентности $(^3)$ множества U (ребра u и $u' \in U$ эквивалентны, если $u = u'$ или существует такая последовательность $u = u_1, u_2, \dots, u_s = u'$, что при любом $i = 1, 2, \dots, s-1$ ребра u_i и u_{i+1} являются противоположными сторонами некоторой грани из Φ). Известно $(^3)$, что каждый класс U_j , $j = 1, 2, \dots, q$, есть разрез $(^1, ^2)$.

Пусть $G' = (X', U')$ — некоторый подграф графа $G = (X, U)$. Через $p_\alpha(G')$ будем обозначать число $\sum_{x \in X'} p_\alpha(x)$. Далее, через G_j' и G_j'' будем обозначать компоненты связности $(^1, ^2)$ графа $G_j = (X, U \setminus U_j)$, $j = 1, 2, \dots, q$.

5°. Для каждого фиксированного $j = 1, 2, \dots, q$ верно соотношение

$$(p_\alpha(G_j') - p_\alpha(G_j''))(p_\beta(G_j') - p_\beta(G_j'')) \geq 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, k.$$

Лемма. Если граф $G = (X, U)$ и функции $a_\alpha(u)$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$, удовлетворяют условиям 1° — 4°, а $M \subset X$ — выпуклое множество относительно одного d_α , то множество M выпукло и относительно всех d_α , $\alpha = 1, 2, \dots, k$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1 работы (3).

Теорема 1. Если граф $G = (X, U)$ и функции $a_\alpha(u)$, $p_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$ удовлетворяют условиям 1° — 5°, а $M \subset X$ — заданное выпуклое множество относительно некоторого d_α , то существует вершина $x_* \in X$, в которой минимизируются все функционалы (4).

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 существует хотя бы одна вершина $\bar{x} \in X$, в которой, независимо от выбора функций $a_\alpha(u)$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$, все функционалы (4) одновременно принимают минимальные значения, причем вершина $\bar{x}$ может быть найдена без использования значений функций $a_\alpha(u)$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$.

Теорема 3. При условиях теоремы 1 множество X_* всех элементов x_* , одновременно минимизирующих все функционалы (4), является выпуклым относительно всех d_α , $\alpha = 1, 2, \dots, k$. Точно так же выпуклым (относительно всех d_α , $\alpha = 1, 2, \dots, k$) является множество $\bar{X}$, состоящее из всех элементов $\bar{x}$, существование которых утверждается в теореме 2.

Доказательство этих теорем проводится на основе результатов, изложенных в работах (3-6, 9, 10) с использованием леммы.

4. Теперь изложим основные моменты построения алгоритма решения рассмотренной выше задачи для графа G и функции $a_\alpha(u)$, удовлетворяющих условиям 1° — 5° (оценка для ε , указываемая ниже, принадлежит К. Ф. Присакару).

1) Фиксируется (некоторая) вершина $x_1 \in X$ и для каждой вершины $x_i \in X$ составляется вектор $T(x_i) = (t^1(x_i), t^2(x_i), \dots, t^q(x_i))$ по правилу: $t^j(x_i)$ равно 0 или 1, если цепь (произвольная), соединяющая x_1 с x_i , содержит четное или нечетное число ребер разреза U_j , $j = 1, 2, \dots, q$, соответственно.

2) Фиксируется некоторое (произвольное) α и для каждого x находятся все отличные от нуля числа $\delta_j = |p_\alpha(G_j') - p_\alpha(G_j'')|$, $j = 1, 2, \dots, q$; берется $\varepsilon = \frac{1}{|X|} \min \delta_j$. Если же $\delta_j = 0$ для всякого $j = 1, 2, \dots, q$, то любая вершина $x \in X$ есть решение.

3) При помощи числа $s^j = \sum_{x_i \in X} (p_\alpha(x_i) + \varepsilon)(1 - 2t_i^j)$, $j = 1, 2, \dots, q$, определяется вектор $t^0 = (t^1, t^2, \dots, t^q)$, где

$$t^j = \begin{cases} 1, & \text{если } s^j > 0, \\ 0, & \text{если } s^j < 0, \\ 0 \text{ или } 1 \text{ (безразлично)}, & \text{если } s^j = 0. \end{cases}$$

4) Ищется вершина $\bar{x} \in M$, для которой вектор $T(\bar{x})$ удовлетворяет условию

$$\|t^0 - T(\bar{x})\| = \min_{x \in M} \|t^0 - T(x)\| = \min_{x \in M} \sum |t^j - t^j(x)|.$$

Оказывается, что найденная вершина $\bar{x}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Интересно, что этот алгоритм дает некоторую точку $\bar{x}$ по данным $p_\alpha(x)$, $i = 1, 2, \dots, |X|$, относящимся только к одному α ; тем не менее, найденная таким путем точка $\bar{x}$ минимизирует все функционалы (4) (см. теоремы 1, 2).

5. Как мы отметили выше, для произвольного графа (не удовлетворяющего условиям 1° — 4°) функционалы (4), вообще говоря, не будут одновременно достигать минимума ни в какой точке $x \in X$. Если же $k = 1$, т. е. рассматривается только один функционал $F_1(x) = F(x)$, то, как показано в (3), он всегда достигает минимума в некоторой точке $x^* \in M$ (где M — выпуклое относительно $d_1 = d$). Нахождение точки $x^* \in M$ можно осуще-

свить, например, следующим алгоритмом, легко вытекающим (как это заметил А. К. Кельманс для случая $X = M$, $p(x_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) на основе алгоритма из пункта 4.

1) Для каждой вершины $y_i \in M$ строится дерево $H_i = (X, V_i)$, обладающее тем свойством, что число $d'(y_i, y)$, определенное для графа H_i точно так же, как это было сделано для G , равно числу $d(y_i, y)$ (см. ⁹, ¹⁰).

2) Для каждого графа H_i , $i = 1, 2, \dots, r = |M|$, описанным выше алгоритмом (см. п. 4) находится множество $\bar{X}_i$ всех решений задачи ХМУ (см. ⁽³⁾), где $Y = \{y \in X, p(y) > 0\}$.

3) Для каждого $x \in \bigcup_{i=1}^r \bar{X}_i$ вычисляем значение соответствующего функционала. Из множества полученных значений выбираем наименьшее. Вершина графа G , для которой достигается это минимальное значение, и есть решение задачи Штейнера для графа G (см. ⁽³⁾).

Кишиневский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
7 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Берг, Теория графов и ее применения, М., 1962. ² А. А. Зыков, Теория конечных графов, Новосибирск, 1969. ³ П. С. Солтан, К. Ф. Присакару, ДАН, 198, № 1 (1971). ⁴ П. С. Солтан, К. Ф. Присакару, Прикладная математика и программирование, Кишинев, № 6 (1970). ⁵ Д. К. Замбицкий, П. С. Солтан, Математические методы в экономических задачах, М., № 1 (1969). ⁶ Д. К. Замбицкий, Прикладная математика и программирование, Кишинев, 1968. ⁷ M. Pol-lack, W. Wiebenson, Operations Research, 8, March — April, 1960. ⁸ А. К. Кельманс, Оценка надежности структур связи и вопросы построения надежных структур, «Наука», 1964. ⁹ O. Hanner, Math. Scand., 4, 65 (1956). ¹⁰ B. Szökefávi-Nagy, Acta Sci. Math., 15, 169 (1954).