Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 2

УДК 532.5 *ГИДРОМЕХАНИКА*

В. И. СТЕПАНОВА

О ПРИМЕНЕНИИ КАВИТАЦИОННЫХ СХЕМ К ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ УСТУП НА ДНЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 9 VI 1971)

В случае течения жидкости при наличии уступа на дне может иметь место (в зависимости от режима скоростей) плавное обтекание уступа, образование вихревой зоны или каверны за ним. Целью настоящей работы является применение некоторых существующих кавитационных схем ([1, 2]) к исследованию плоского потенциального течения идеальной, несжимаемой жидкости с уступом на дне. При этом в п.п. 1, 2 жидкость предполагается невесомой, а в п.п. 3, 4 — тяжелой.

1. Рассматривается течение жидкости через уступ по схеме, аналогичной кавитационной схеме Рябушинского (рис. 1*а*). Скорость течения

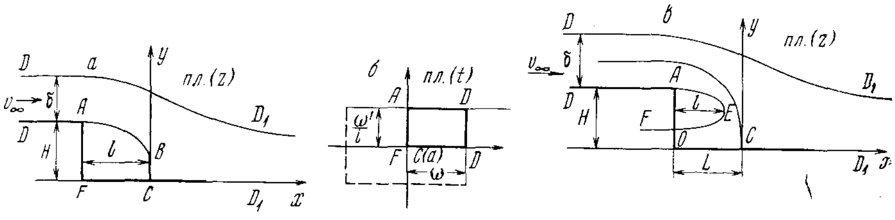

Рис. 1

возрастает на участке границы DA от v_∞ в бесконечно удаленной точке D до v_0 в начале уступа A. На границе AB каверны позади уступа давление равно p_0 и скорость имеет постоянный модуль v_0. На прямолинейном вертикальном отрезке BC, замыкающем каверну, скорость уменьшается от v_0 до нуля в точке C. На участке границы CD_1 скорость возрастает от нуля до v_∞. На свободной поверхности DD_1 давление равно p_∞, а скорость имеет постоянный модуль v_∞.

С помощью метода особых точек найдено общее решение задачи *:

$$\frac{1}{v_\infty}\cdot\frac{dw}{dt} = N_1 i\left[\theta_1\left(\frac{t}{2\omega}\right)\cdot\theta_4\left(\frac{t}{2\omega}\right)\right]\Big/\left[\theta_2\left(\frac{t}{2\omega}\right)\cdot\theta_3\left(\frac{t}{2\omega}\right)\right]; \qquad (1,1)$$

$$\frac{1}{v_\infty}\cdot\frac{dw}{dz} = \left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^{1-t/\omega}\sqrt{\theta_1\left(\frac{t-a}{2\omega}\right)\Big/\theta_1\left(\frac{t+a}{2\omega}\right)}, \qquad (2,1)$$

где w — комплексный потенциал, $N_1 = -i\delta\theta_4^2/\omega$, δ — ширина потока в бесконечности.

Параметрическое переменное t изменяется внутри прямоугольника со сторонами ω и ω'/i вспомогательной плоскости (t) (рис. 1*б*).

Математическим параметрам $a = 2\omega' i \ln(v_0/v_\infty)/\pi$ и ω'/ω соответствуют физические параметры — число кавитации $\lambda = 2(p_\infty - p_0)\times(\rho v_\infty^2)^{-1} = (v_0/v_\infty)^2 - 1$ и относительная глубина потока δ/H, H — выступа уступа.

* Обозначения тэта-функций соответствуют принятым в ([3]).

Разложив тэта-функции в ряды по степеням $h' = \exp(\pi i \tau')$, где $\tau' = -\omega/\omega'$, из формул (1,1) и (2,1) получим предельный случай бесконечной глубины:

$$dw/dt = -v_\infty \sin(\pi t/\omega'); \tag{3,1}$$

$$\frac{dw}{dz} = v_0 \sqrt{\sin\frac{\pi(t-a)}{2\omega'} \Big/ \sin\frac{\pi(t+a)}{2\omega'}}, \tag{4,1}$$

где выражение для dw/dt записано с точностью до масштабного множителя. При этом область изменения параметрического переменного t превращается в горизонтальную полуполосу.

Из формул (1,1) и (2,1) находим

$$dz = N_1 i \frac{v_\infty}{v_0}\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^{t/\omega} \sqrt{\frac{\theta_1\left(\frac{t+a}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{t-a}{2\omega}\right)} \frac{\theta_1\left(\frac{t}{2\omega}\right)\cdot\theta_4\left(\frac{t}{2\omega}\right)}{\theta_2\left(\frac{t}{2\omega}\right)\cdot\theta_3\left(\frac{t}{2\omega}\right)}}\,dt. \tag{5,1}$$

Это равенство позволило численным путем при различных значениях λ найти зависимость между относительным расстоянием l/H критической

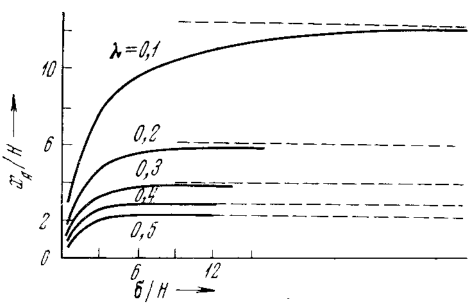

Рис. 2

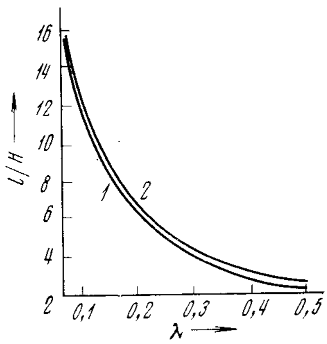

Рис. 3

точки C от основания уступа и величиной δ/H. Проведены вычисления для характерных чисел кавитации λ и различных значений τ'. Горизонтальные асимптоты полученных графиков (рис. 2) соответствуют бесконечной глубине потока. Из рис. 2 видно, что начиная с $\delta/H \approx 10$ для чисел кавитации $\lambda = 0{,}2$—$0{,}5$ свободная поверхность DD_1 практически не влияет на относительное расстояние l/H критической точки от основания уступа.

2. Рассмотрим теперь задачу о течении жидкости через уступ по кавитационной схеме Эфроса — Гилбарга [2]. Давление на линии тока AEF, ограничивающей каверну, постоянно и равно p_0 (рис. 1*в*). Струя AEF бесконечно продолжается влево и уходит на 2-й лист римановой поверхности. Точка C — критическая точка течения.

Общее решение задачи имеет вид

$$\frac{1}{v_\infty}\frac{dw}{dt} = N_2 i \frac{\theta_4\left(\frac{t}{2\omega}\right)\theta_1\left(\frac{t-a}{2\omega}\right)\theta_1\left(\frac{t+a}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{t}{2\omega}\right)\theta_2\left(\frac{t}{2\omega}\right)\theta_3\left(\frac{t}{2\omega}\right)}; \tag{1,2}$$

$$\frac{1}{v_\infty}\frac{dw}{dz} = \left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^{1-t/\omega}\theta_1\left(\frac{t-a}{2\omega}\right)\Big/\theta_1\left(\frac{t+a}{2\omega}\right), \tag{2,2}$$

$$N_2 = i\frac{\theta_2^2\theta_4^2}{\theta_2^2(a/(2\omega))}\frac{\delta}{\omega}, \quad a = -\frac{i\omega'\ln(v_0/v_\infty)}{\pi}.$$

Здесь параметрическое переменное t изменяется внутри того же прямоугольника, что и в предыдущей задаче (рис. 1*б*).

Из формул (1,2) и (2,2) при $h' \to 0$ получен предельный случай бесконечной глубины:

$$\frac{1}{v_\infty}\frac{dw}{dz} = \frac{v_0}{v_\infty}\sin\frac{\pi(t-a)}{2\omega'} \Big/ \sin\frac{\pi(t+a)}{2\omega'}; \tag{3,2}$$

$$\frac{1}{v_\infty}\frac{dw}{dt} = -\sin\frac{\pi(t-a)}{2\omega'}\sin\frac{\pi(t+a)}{2\omega'}\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2\omega'}, \tag{4,2}$$

правая часть (4,2) записана с точностью до масштабного множителя.

Для удобства числовых расчетов горизонтальная полуполоса плоскости (t) переведена в верхнюю полуплоскость вспомогательной плоскости (u). В результате из (3,2) и (4,2) получим

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{v_0}\frac{(\sqrt{u}+1)^2}{u(u-n)^2},$$

$$n = \frac{(\sqrt{\lambda+1}+1)^2}{\lambda^2}. \tag{5.2}$$

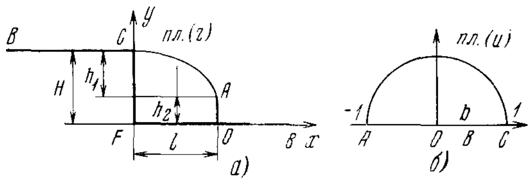

Рис. 4

Формулы (5,2) позволили вычислить относительную длину каверны l/H (рис. 3) в диапазоне малых чисел кавитации. Как было установлено в п. 1 предельный случай бесконечной глубины практически соответствует значениям относительной глубины течения $\delta/H \geqslant 10$.

Вычисления показали, что величина L/H (рис. 1*в*) совпадает с относительной длиной каверны l/H. Кривая для l/H близка к соответствующей кривой, полученной по формулам п. 1 (рис. 3, *1*, *2*). Это подтверждает правомерность использования и схемы Рябушинского, и схемы Эфроса — Гилбарга для исследования течения жидкости через уступ на дне.

3. Приведенное в п. 1 решение плоской задачи о течении невесомой жидкости через уступ на дне по кавитационной схеме, аналогичной схеме Рябушинского, можно одновременно рассматривать как некоторое приближенное решение такой же задачи для тяжелой жидкости. Приближенность состоит в том, что течение тяжелой жидкости с переменными скоростями на свободных границах DD_1 и AB (рис. 1*а*) моделируется течением невесомой жидкости с постоянными по модулю скоростями на этих границах. При этом предполагается, что давления на DD_1 и AB одинаковы. Тогда интеграл Бернулли приводит к соотношению

$${}^1/_2 v_\infty^2 + g(H+\delta) = {}^1/_2 v_0^2 + gH, \tag{1,3}$$

откуда

$$\frac{v_0^2}{v_\infty^2} - 1 = \frac{2\delta}{H}\cdot\frac{1}{\mathrm{Fr}}, \tag{2,3}$$

где $\mathrm{Fr} = v_\infty{}^2/(gH)$ — число Фруда.

В то же время для течения невесомой жидкости

$$v_0^2/v_\infty^2 - 1 = \lambda. \tag{3,3}$$

Приравнивая правые части выражений (2,3) и (3,3), получаем связь между течениями невесомой и тяжелой жидкостей:

$$\lambda = \frac{2\delta}{H}\frac{1}{\mathrm{Fr}}. \tag{4,3}$$

Перестраивая на основании соотношения (4,3) кривые на рис. 2, можно получить зависимость величины l/H от числа Fr при различных значениях δ/H для рассматриваемой модели течения тяжелой жидкости.

4. Применим к исследованию течения тяжелой жидкости бесконечной глубины через уступ на дне по кавитационной схеме Рябушинского

(рис. $4a$) метод, рассмотренный в [4] *. Здесь удобно области изменения w и dw/dz отобразить на верхний полукруг единичного радиуса плоскости параметрического переменного (рис. $4б$). Тогда методом особых точек получим

$$\frac{dw}{du} = N\frac{u^2-1}{(u-b)(u-1/b)^2}. \tag{1,4}$$

Комплексная скорость ищется в виде

$$\zeta = dw/dz = v_c\sqrt{u}\exp\left[\Omega(u)\right], \tag{2,4}$$

$$\Omega(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n, \tag{3,4}$$

причем коэффициенты c_n действительны, и, согласно условию $\zeta(1) = v_c$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0. \tag{4,4}$$

Граничное условие на струе CA (т. е. при $u = e^{i\sigma}$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$)

$$v^2 + 2gy = \text{const} \tag{5,4}$$

может быть легко преобразовано в

$$|\zeta|^3 d|\zeta| / d\sigma = g|dw/du|\,\mathrm{Im}\,\zeta. \tag{6,4}$$

В результате использования (1,4) — (3,4) условие (6,4) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n\sin n\sigma = -\frac{2g|N|}{v_c^3}e^{\left(-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\cos n\sigma\right)}\frac{\sin\sigma\cdot\sin\left(\frac{\sigma}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\sin n\sigma\right)}{(b+1/b-2\cos\sigma)^2}. \tag{7,4}$$

Равенство (7,4) приводит к бесконечной системе уравнений для определения коэффициентов c_n:

$$c_n = \frac{2\rho}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\sin\sigma\cdot\sin n\sigma}{(b+1/b-2\cos\sigma)^2}\exp\left(-3\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos n\sigma\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{\sigma}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin n\sigma\right)d\sigma, \quad n = 1, 2, 3\ldots, \tag{8,4}$$

где $\rho = -\frac{2|N|}{v_c H}\frac{1}{\mathrm{Fr}}$, $\mathrm{Fr} = \frac{v_c^2}{gH}$.

Коэффициенты c_n могут быть найдены из (8,4) и (4,4) методом итераций.

Общее решение задачи, выраженное формулами (1,4) и (2,4), дает возможность численным путем найти зависимость относительного расстояния критической точки l/H от числа Фруда при различных значениях числа кавитации λ, ограничиваясь при этом несколькими первыми членами ряда (4,4).

Всесоюзный заочный электротехнический
институт связи
Москва

Поступило
2 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, «Наука», 1966. [2] М. И. Гуревич, Теория струй идеальной жидкости, М., 1961. [3] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 3, М., 1934. [4] Л. М. Котляр, А. Г. Терентьев, Обтекание пластины с частичной кавитацией потоком тяжелой жидкости. Тр. семинара по краевым задачам, Казань, 1970.

* Пользуюсь случаем поблагодарить А. Г. Терентьева за полезное обсуждение.