

Н. Н. АМОСОВА

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 17 VI 1971)

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое решетчатое распределение с функцией распределения $F(x)$ и конечной дисперсией $DX_1 = \sigma^2$. Пусть X_1 имеет только возможные значения вида $a + kH$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), где a — некоторое действительное число, H — шаг распределения. Без ограничения общности предположим, что $EX_1 = 0, EX_1^2 = 1$. Введем следующие обозначения:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad P_n(k) = P(S_n = na + kH), \quad x = \frac{na + kH}{\sqrt{n}}.$$

В. Рихтер ⁽¹⁾ рассматривал большие отклонения суммы S_n в случае, когда распределение F удовлетворяет условию Крамера и $x = o(\sqrt{n})$ при $n \rightarrow \infty$. Ю. В. Линник ⁽²⁾ получил ряд интегральных и локальных предельных теорем для больших отклонений в случае, когда условие Крамера не выполнено и x изменяется в зоне вида $0 \leq x \leq n^\alpha$, где $0 < \alpha < 1/2$. Предполагая, что H есть максимальный шаг и $0 < \alpha < 1/2$, В. В. Петров ⁽³⁾ показал, что условие $E \exp(\beta |X_1|^{4\alpha/(2\alpha+1)}) < \infty$ при некотором $\beta > 0$ является достаточным для выполнения соотношения

$$\frac{\sqrt{n}}{H} P_n(k) \bigg/ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) = \exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda^{[s]} \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) (1 + o(1)) \quad (1)$$

в области $|x| \leq n^\alpha / \rho(n)$ и необходимым (при любом $\beta > 0$) для выполнения (1) в области $|x| \leq n^\alpha \rho(n)$. Здесь $\rho(n)$ — монотонная функция такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n) = +\infty$, s — целое неотрицательное число, определяемое неравенствами

$$\frac{s}{2(s+2)} < \alpha \leq \frac{s+1}{2(s+3)}, \quad (2)$$

$\lambda^{[s]}(t)$ — отрезок ряда Крамера, состоящий из первых его s членов. Ряд локальных предельных теорем для больших отклонений был получен С. В. Нагаевым ⁽⁴⁾, П. Сурвиллой ⁽⁵⁾. А. В. Нагаевым ⁽⁶⁾, В. Вольфом ⁽⁷⁾ и др.

В данной работе рассматриваются большие отклонения в области $0 \leq x \leq \Lambda(n) / \sqrt{n}$ с функцией $\Lambda(z)$ такой, что при всех достаточно больших z

$$\Lambda(z) < z^\alpha, \quad 1/2 < \alpha < 1, \quad (3)$$

и, кроме того, выполнены некоторые дополнительные условия.

Пусть $k = k(\Lambda)$ — наибольшее целое число, для которого

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} (\Lambda^k(z) / z^{k-1}) > 0. \quad (4)$$

Мы будем интересоваться условиями выполнения соотношения

$$\frac{\sqrt{n}}{H} P(S_n = na + kH) \left/ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) \right. = \\ = \exp\left(\sum_{v=3}^k \mu_v \frac{x^v}{n^{v/2-1}}\right) (1 + o(1)), \quad 0 \leq x \leq \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $\mu_3, \dots, \mu_k$ — некоторые вещественные числа.

Задача выяснения условий применимости асимптотических равенств типа (5) была поставлена в (8). Данная работа по методам и результатам примыкает к работе (9), в которой была рассмотрена аналогичная задача для интегральных теорем. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть $1/2 < \alpha < 1$, $k = [1/(1-\alpha)]$. Для выполнения соотношения

$$\frac{\sqrt{n}}{H} P_n(k) \left/ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) \right. = 1 + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно x в интервале $0 \leq x \leq n^{\alpha-1/2}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$1) \int_z^\infty \exp(\alpha(2(1-\alpha))^{1/\alpha-1} y^{2-1/\alpha}) dF(y) = o(z^{-1/\alpha}), \quad z \rightarrow \infty;$$

$$2) \int_{-\infty}^{-z} |y|^k dF(y) = o(z^{-(1/(1-\alpha))}), \quad z \rightarrow \infty;$$

3) моменты случайной величины X_1 до порядка k включительно совпадают с соответствующими моментами нормальной случайной величины с параметрами $(0, 1)$ *;

4) шаг H максимален.

Здесь $[t]$ и $\{t\}$ обозначают целую и дробную части числа t .

Теорема 2. Пусть $1/2 < \alpha < 1$, $k = [1/(1-\alpha)]$; $\mu_3, \dots, \mu_k$ — некоторые вещественные числа. Для того чтобы соотношение

$$\frac{\sqrt{n}}{H} P_n(k) \left/ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) \right. = \exp\left(\sum_{v=3}^k \mu_v \frac{x^v}{n^{v/2-1}}\right) (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

выполнялось равномерно относительно x в интервале $0 \leq x \leq n^{\alpha-1/2}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$1) \int_z^\infty \exp\left(y \sum_{v=1}^{k-1} c_v y^{v(1-1/\alpha)}\right) dF(y) = o(z^{-1/\alpha}), \quad z \rightarrow \infty;$$

$$2) \int_{-\infty}^{-z} |y|^k dF(y) = o(z^{-(1/(1-\alpha))}), \quad z \rightarrow \infty;$$

3) величины μ_v совпадают с соответствующими коэффициентами ряда Крамера, $\mu_v = \lambda_{v-3}$, $v = 3, \dots, k$;

4) шаг H максимален.

Здесь постоянная c_1 зависит только от α ; постоянные c_v ($v = 2, \dots, k-1$) зависят только от α , $\mu_3, \dots, \mu_{v-1}$: $c^1 = \alpha(2(1-\alpha))^{1/d-1}$, $c_2 = \mu_3(2(1-\alpha))^{2(1/\alpha-1)}(-4\alpha^2 + 2\alpha - 1)$ при $k = 2$ мы считаем, что $\sum_k = 0$.

Рассмотрим теперь следующую зону изменения x : $0 \leq x \leq \Lambda(n) / \sqrt{n}$. Предположим, что $\Lambda(z)$ — дважды дифференцируемая функция, удовлет-

* Существование всех моментов величины X_1 вплоть до k -го порядка следует из первых двух условий теоремы.

воряющая при всех достаточно больших z ($z > z_0$) условиям

$$(\frac{1}{2} + \varepsilon) \Lambda(z) < z \Lambda'(z) < (1 - \varepsilon) \Lambda(z), \quad (6)$$

$$\varepsilon \Lambda(z) < -z^2 \Lambda''(z) < (1/\varepsilon) \Lambda(z),$$

где ε — сколь угодно малая положительная постоянная. Для выполнения (6) достаточно, чтобы $\Lambda(z)$ допускала представление

$$\Lambda(z) = \int_1^z \exp\left(\int_1^y \varphi(x) dx\right) dy,$$

где функция $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенству $\varepsilon < -x\varphi(x) < \frac{1}{2} - \varepsilon$. Из условий (6), в частности, следует, что

$$(\Lambda(z_0)/z_0^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) z^{\frac{1}{2}+\varepsilon} < \Lambda(z) < (\Lambda(z_0)/z_0^{1-\varepsilon}) z^{1-\varepsilon}, \quad z > z_0.$$

Пусть $z = Z(y)$ — решение уравнения

$$\Lambda(z) - z \Lambda'(z) - y/2 = 0. \quad (7)$$

В силу (6) решение уравнения (7) существует и единственно. Положим

$$g(y) = y(2\Lambda(Z(y)) - y)/(2Z(y)). \quad (8)$$

Теорема 3. Пусть функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (6) и пусть k и $g(y)$ определены равенствами (4), (7) и (8). Для выполнения соотношения

$$\frac{\sqrt{n}}{H} P_n(k) / \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) = 1 + o(1), \quad 0 \leq x \leq \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$1) \int_z^\infty \exp(g(y)) dF(y) = o(1/\Lambda^{-1}(z)), \quad z \rightarrow \infty;$$

$$2) \int_{-\infty}^0 \frac{|y|^{k+1}}{|y| + z} dF(y) = o(z^k/\psi^{-1}(z)), \quad z \rightarrow \infty;$$

3) моменты случайной величины X_1 до порядка k включительно совпадают с соответствующими моментами нормальной случайной величины с параметрами $(0, 1)$;

4) шаг H максимален.

Здесь $\Lambda^{-1}(z)$ и $\psi^{-1}(z)$ — функции, обратные к функциям $\Lambda(z)$ и $\psi(z) = z/\Lambda(z)$ (в силу (6) функции $\Lambda(z)$ и $\psi(z)$ строго монотонны).

Далее, пусть $z = Z(y)$ — решение уравнения

$$\sum_{\nu=2}^k \mu_\nu \left(\frac{\nu \Lambda'(z)}{z^{\nu-1}} ((\Lambda(z) - y)^{\nu-1} - \Lambda^{\nu-1}(z)) - \frac{\nu-1}{z^\nu} ((\Lambda(z) - y)^\nu - \Lambda^\nu(z)) \right) = 0 \quad (9)$$

в области $y_0 < y < \Lambda(z)$, где $\mu_2 = -\frac{1}{2}$; $\mu_3, \dots, \mu_k$ — вещественные числа. В этой области уравнение (9) имеет единственное решение. Положим

$$g(y) = \sum_{\nu=2}^k \mu_\nu Z^{1-\nu}(y) ((\Lambda(Z(y)) - y)^\nu - \Lambda^\nu(Z(y))). \quad (10)$$

Теорема 4. Пусть функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (6), число k определено равенством (4), $\mu_3, \dots, \mu_k$ — вещественные числа, функция $g(y)$ определена в соответствии с (9) и (10). Для выполнения соотношения

$$\frac{\sqrt{n}}{H} P_n(k) / \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) = \exp\left(\sum_{\nu=3}^k \mu_\nu \frac{x^\nu}{n^{\nu/2-1}}\right) (1 + o(1)),$$

$$0 \leq x \leq \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$1) \int_z^{\infty} \exp(g(y)) dF(y) = o(1/\Lambda^{-1}(z)), \quad z \rightarrow \infty;$$

$$2) \int_{-\infty}^0 \frac{|y|^{k+1}}{|y|+z} dF(y) = o(z^k/\psi^{-1}(z)), \quad z \rightarrow \infty;$$

3) существуют моменты величины X_1 до порядка k включительно и величины μ_ν совпадают с соответствующими коэффициентами ряда Крамера, $\mu_\nu = \lambda_{\nu-3}$, $\nu = 3, \dots, k$;

4) шаг H максимален.

Теоремы 1 — 3 являются следствием более общей теоремы 4.

Применяя теоремы 1 — 4 к последовательности $\{-\bar{X}_n\}$, можно найти условия выполнения соотношения

$$\frac{\sqrt{n}}{H} P(S_n = na + kH) / \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) = \exp\left(\sum_{\nu=3}^k \mu_\nu \frac{x^\nu}{n^{\nu/2-1}}\right) (1 + o(1)),$$

$$-\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \leq x \leq 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Приведенные теоремы позволяют получить необходимые и достаточные условия выполнения соотношений (11) и (12) одновременно.

Приведем двусторонний аналог лишь теоремы 4.

Теорема 5. Пусть функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (6), число k определено равенством (4), $\mu_3, \dots, \mu_k$ — вещественные числа, $g_1(y)$ определена равенствами (9) и (10), $g_2(y)$ определена равенствами (9) и (10) с заменой μ_ν на $(-1)^\nu \mu_\nu$, $\nu = 3, \dots, k$. Пусть далее, $g(y) = g_1(y)$ и $g(-y) = g_2(y)$ для $y > y_0 > 0$. Для выполнения соотношения

$$\frac{\sqrt{n}}{H} P(S_n = na + kH) / \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) = \exp\left(\sum_{\nu=3}^k \mu_\nu \frac{x^\nu}{n^{\nu/2-1}}\right) (1 + o(1)),$$

$$|x| \leq \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$1) \int_{|y| \geq z} \exp(g(y)) dF(y) = o(1/\Lambda^{-1}(z)), \quad z \rightarrow \infty;$$

2) $EX_1 = 0$, $DX_1 = 1$, величины μ_ν совпадают с соответствующими коэффициентами ряда Крамера, $\mu_\nu = \lambda_{\nu-3}$, $\nu = 3, \dots, k$;

3) шаг H максимален.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. В. Петрову за руководство данной работой и Л. В. Осипову за ценные замечания.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Рихтер, Теория вероятн. и ее применения, 2, в. 2, 214 (1957). ² Ю. В. Линник, Теория вероятн. и ее применения, 6, в. 2, 145 (1961); 6, в. 4, 377 (1961); 7, в. 2, 124 (1962). ³ В. В. Петров, Вестн. Ленингр. ун-в., № 19, 49 (1963). ⁴ С. В. Нагаев, Вестн. Ленингр. ун-в., № 1, 80 (1962). ⁵ П. Сурвила, Литовск. матем. сборн., 8, № 2, 317 (1968). ⁶ А. В. Нагаев, Сборн. Предельн. теоремы теории вероятн., Ташкент, 1963; сборн. Предельн. теоремы и вероятн. процессы, Ташкент, 1967. ⁷ В. Вольф, Диссертация, ЛГУ, 1969. ⁸ И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965. ⁹ Л. В. Осипов, ДАН, 196, № 5, 1020 (1971).