Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 6

АСТРОНОМИЯ

Т. А. АГЕКЯН

ТРЕТИЙ ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ В ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМАХ И В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛА

(*Представлено академиком А. А. Михайловым 12 IV 1971*)

Как известно, в стационарной вращающейся звездной системе в общем случае существует три изолирующих интеграла движения звезды:

$$I = {}^1/_2(\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2) - \Phi(R, z); \tag{1}$$

$$J = R\cdot\Theta; \tag{2}$$

$$K = K(R, z, \Pi, \Theta, Z) \tag{3}$$

R, φ, z — цилиндрические координаты, Π, Θ, Z — соответствующие им компоненты скорости, $\Phi(R, z)$ — потенциал.

Согласно теореме Джинса, фазовая плотность в системе является функцией этих интегралов движения

$$\psi = \psi(I, J, K). \tag{4}$$

Любой функции (4), заданной в некоторой области (A) пространства интегралов движения, соответствует определенная звездная система, стационарная в регулярном поле. Также любой вращающейся звездной системе, стационарной в регулярном поле, соответствует определенная функция (4).

Для решения проблем теории вращающихся звездных систем основное значение имеет определение аналитической формы третьего интеграла движения (3). Знание аналитической формы (3) в осесимметричном поле потенциала играет важную роль и для небесной механики.

Основные усилия в разрешении проблемы третьего интеграла движения до сих пор сводились к непосредственным поискам такой аналитической формы (3), значение которой сохраняет неизменность при движении тела. В решении этой проблемы достигнуты определенные успехи (см. обзор ([1])), но, все-таки, аналитическая форма (3) до сих пор не найдена.

Покажем, что задачу можно решить, основываясь на теореме Джинса.

Будем считать, что система имеет плоскость симметрии. Напишем выражение для полной массы вращающейся звездной системы, стационарной в регулярном поле,

$$M = m\iint \psi(I, J, K)\, R\, dR\, d\varphi\, dz\, d\Pi\, d\Theta\, dZ. \tag{5}$$

Интегрирование произведено по всему фазовому пространству системы, m — масса одной звезды. Звездная система может находиться и во внешнем поле.

Перейдем в (5) к новым переменным интегрирования — интегралам движения, а также выполним интегрирование по φ

$$M = 2\pi m \int\limits_{(A)} \psi(I, J, K)\, dI\, dJ\, dK \int \frac{\partial(\Pi, \Theta, Z)}{\partial(I, J, K)} R dR dz. \tag{6}$$

Стационарную звездную систему нужно представлять как совокупность траекторий, вдоль которых непрерывной вереницей движутся звезды. Эти материальные траектории определяют силовое поле системы, которое, в свою очередь, определяет формы траекторий. Каждая тройка значений I, J, K определяет в данной системе одну траекторию.

Вклад траекторий, интегралы движений которых заключены в промежутке $[I, I + dI; J, J + dJ; K, K + dK]$, в общую массу системы составляет

$$dM = 2\pi m\psi(I, J, K)\, dI\, dJ\, dK \int \frac{\partial(\Pi, \Theta, Z)}{\partial(I, J, K)} R\, dR\, dz. \tag{7}$$

Выражение (7) показывает, что парциальная плотность, создаваемая этими траекториями, равна

$$D(R, z)\, dI\, dJ\, dK = m\psi(I, J, K)\, dI\, dJ\, dK \frac{\partial(\Pi, \Theta, Z)}{\partial(I, J, K)}. \tag{8}$$

В широком классе случаев витки траектории заполняют объем некоторого тора, а в сопутствующей (меридиональной) плоскости — некоторую область, «ящик». Если значение J интеграла площадей задано, то в сопутствующей плоскости условием

$$R_0 \partial\Phi(R_0, 0) / \partial R + 2\Phi(R_0, 0) + 2I = 0 \tag{9}$$

определяется точка $(R_0, 0)$, находящаяся внутри «ящика».

Нетрудно видеть, что парциальную плотность можно определить:

$$RD(R, z) = H(R, z) / \sqrt{\Pi^2 + Z^2}, \tag{10}$$

где $H(R, z)$ — плотность «укладки» витков траектории в сопутствующей плоскости.

Как видно из работы ([2]), через каждую точку внутри «ящика» траектория проходит два раза. Существует два однозначных поля скоростей, каждое из которых не симметрично относительно оси $z = 0$. Эти поля определяют друг друга равенствами

$$\Pi_2(R, z) = \Pi_1(R, -z), \quad Z_2(R, z) = -Z_1(R, -z). \tag{11}$$

Поэтому суммарное (двузначное) поле скоростей симметрично относительно оси $z = 0$. Всякий раз, когда траектория звезды касается контура «ящика», она переходит из одного поля скоростей в другое.

Необходимо ввести в рассмотрение плотность $h(R, z)$ «укладки» витков траектории в одном поле скоростей и соответствующую ей парциальную плотность $\delta(R, z)$, которые также связаны равенством

$$R\delta(R, z) = h(R, z) / \sqrt{\Pi^2 + Z^2}. \tag{12}$$

При этом, очевидно,

$$D(R, z) = \delta(R, z) + \delta(R, -z), \quad H(R, z) = h(R, z) + h(R, -z). \tag{13}$$

Третий интеграл движения определяется отдельно для каждого поля скоростей, поэтому равенство (8) должно быть записано в виде

$$\delta(R, z) = m\psi(I, J, K) \partial(\Pi, \Theta, Z) / \partial(I, J, K). \tag{14}$$

Раскрывая в нем при помощи равенств (1) — (3) якобиан и используя (12), находим

$$\Pi\, \partial K / \partial Z - Z\, \partial K / \partial \Pi = \sqrt{\Pi^2 + Z^2} / h(R, z) = 1 / R\delta(R, z). \tag{15}$$

Решение (15) дает аналитическую форму третьего интеграла движения

$$K = \frac{w}{h} \operatorname{arc\,tg} \frac{Z}{\Pi} + \chi(R, z), \tag{16}$$

где функция

$$w(R, z) = \sqrt{\Pi^2 + Z^2} = \sqrt{2\Phi(R, z) + J^2R^{-2} + 2I}, \tag{17}$$

$\chi(R, z)$ — произвольная пока функция, она поглотила получаемую также при решении (15) произвольную функцию $\eta(\Pi^2 + Z^2)$, которая согласно (17) есть функция R и z.

Интеграл движения должен удовлетворять уравнению Больцмана

$$\Pi \frac{\partial K}{\partial R} + Z \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial R}\frac{\partial K}{\partial \Pi} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial K}{\partial Z} = 0, \tag{18}$$

где

$$U = \Phi - {}^1/_2 J^2 R^{-2}. \tag{19}$$

Из этого требования находим уравнения

$$\Pi \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{w}{h}\right) + Z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w}{h}\right) = 0; \tag{20}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial R} = -\frac{1}{h}\frac{\partial w}{\partial z}; \tag{21}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{1}{h}\frac{\partial w}{\partial R}. \tag{22}$$

Условие равенства смешанных производных функции χ приводит к уравнению для h:

$$\frac{\partial w}{\partial R}\frac{\partial h}{\partial R} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z} - h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0. \tag{23}$$

Для его решения примем, что h, определяемая с точностью до постоянного множителя, в точке $(R_0, 0)$ равна 1, и рассмотрим (23) на оси $z = 0$. Так как

$$\partial w(R, 0) / \partial z = 0, \tag{24}$$

то, решая (23) на оси $z = 0$, получим $h(R, 0)$. Затем заметим, что, согласно (21), на оси $z = 0$

$$\partial \chi(R, 0) / \partial R = 0 \tag{25}$$

и, следовательно, χ постоянна. Поскольку интеграл движения K определяется с точностью до постоянного слагаемого, можно потребовать, чтобы

$$\chi(R, 0) = 0; \tag{26}$$

определяя Z / Π из (17) и подставляя его в (20), для оси $z = 0$ получаем

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h\, \partial w/\partial R - w\, \partial h/\partial R}{w \operatorname{tg}(Kh/w)}. \tag{27}$$

Таким образом, на оси $z = 0$ определены h и $\partial h / \partial z$. Это позволяет при помощи (23) получить решение для $h(R, z)$ на всей плоскости.

Теперь, учитывая (11), (26) и (22), получим окончательное аналитическое выражение для третьего интеграла движения:

$$K = \pm \frac{w(R, z)}{h(R, \pm z)} \operatorname{arctg} \frac{Z_{1,2}}{\Pi_{1,2}} + \int_0^z \frac{1}{h(R, \pm \zeta)} \frac{\partial w(R, \zeta)}{\partial R} d\zeta. \tag{28}$$

Одному полю скоростей соответствуют в выражении (28) знаки плюс и индекс 1, а другому полю — знаки минус и индекс 2. Переход из одного поля в другое происходит при каждом касании траекторией контура «ящика».

Обозначим $(R_1, 0)$, и $(R_2, 0)$ граничные точки «ящика» на оси $z = 0$. Так как в этих точках $\Pi = 0$, то, согласно (20), в них и $\partial h/\partial z = 0$. Равенство (27) показывает, что точки $(R_1, 0)$ и $(R_2, 0)$ определяются из условия $Kh / w = \pi / 2$.

Контур «ящика» есть геометрическое место точек, для которых

$$h(R, z) = h(R, -z); \tag{29}$$

Он определяется из этого условия.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
8 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Антонов, В сборн. Итоги науки, Кинетика и динамика звездных систем, гл. III, М., 1968. [2] A. Ollongren, Bull. Astr. Netherl., 14, № 521 (1961).