Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 2

УДК 517.92 *МАТЕМАТИКА*

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А. В. ПОКРОВСКИЙ

СИСТЕМЫ ГИСТЕРОНОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 9 III 1971)

Математическое описание гистерезисных нелинейностей, возникающих при описании физических систем типа пластического тела в модели Прагера — Ишлинского ([1-5]), требует введения ряда новых понятий. Первое из этих понятий — виброустойчивость дифференциального уравнения — изучено в ([6]). В настоящей статье выясняется, что в достаточно общих условиях построение решений виброустойчивых уравнений может быть сведено к отысканию решений существенно более простых уравнений. В терминах решений этих простых уравнений удается описать возможные состояния систем частиц, состояние каждой из которых характеризуется решением некоторого виброустойчивого уравнения.

1. Допустим, что состояние элемента (частицы) α характеризуется парой $\{u, x\}$ скалярных величин: внешним полем (управлением) u и внутренним состоянием (напряжением) x. Пусть напряжение x не определяется однозначно внешним полем u, но каждый непрерывный закон $u(t)$ изменения во времени внешнего поля детерминированным способом определяет закон $x(t)$ изменения напряжения при помощи некоторого вольтеррова оператора. Такой элемент α назовем гистероном. В основных известных авторам примерах функция $x(t)$ при каждом непрерывном управлении $u(t)$ определяется как решение виброустойчивого дифференциального уравнения

$$dx / dt = f[t, x, u(t), u'(t); \alpha]. \tag{1}$$

Решения, удовлетворяющие начальному условию $x(t_0) = x_0$, обозначим

$$x(t) = W[t_0, x_0; \alpha]u(t). \tag{2}$$

Напомним, что решения виброустойчивых уравнений определяются при помощи специальных конструкций ([6]) даже в случае гладких управлений $u(t)$ (тем более, в случае недифференцируемых управлений).

Иногда нам удобно называть гистероном не только элемент α, но и оператор (2).

В настоящей работе предполагается, что правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(t, x, u, v; \alpha) =$$
$$= \begin{cases} \max\left\{v \dfrac{d}{du} l_-(u; \alpha),\ vg\,[l_-(u; \alpha), u; \alpha]\right\}, & \text{если } x \leqslant l_-(u; \alpha), \\ vg(x, u; \alpha), & \text{если } l_-(u; \alpha) < x < l_+(u; \alpha), \\ \min\left\{v \dfrac{d}{du} l_+(u; \alpha),\ vg\,[l_+(u; \alpha), u; \alpha]\right\}, & \text{если } x \geqslant l_+(u; \alpha). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $g(x, u; \alpha)$ непрерывна вместе со своей производной $g_u'(x, u; \alpha)$ по совокупности переменных $x, u \in (-\infty, \infty)$; функции $l_-(u; \alpha)$ и $l_+(u; \alpha)$ непрерывно дифференцируемы по u и $l_-(u; \alpha) \leqslant l_+(u; \alpha)$. Такие гистероны α будем называть элементарными.

2. Обозначим через

$$x = p(u; u_0, x_0; \alpha) \tag{4}$$

решения начальных задач

$$dx / du = g(x, u; \alpha), \; x(u_0) = x_0.$$

Пусть $\Pi(\alpha)$ — замкнутая часть плоскости $\{u, x\}$, расположенная между кривыми $x = l_-(u; \alpha)$ и $x = l_+(u; \alpha)$. Предположим, что для каждой точки $\{u_0, x_0\} \in \Pi(\alpha)$ можно построить минимальный содержащий ее конечный отрезок кривой (4), один из концов которого лежит на кривой $x = l_-(u; \alpha)$, а второй — на кривой $x = l_+(u; \alpha)$. Будем считать, что абсциссы $q_-(u_0, x_0; \alpha)$ и $q_+(u_0, x_0; \alpha)$ концов такого минимального отрезка непрерывно зависят от точки $\{u_0, x_0\}$ в полосе $\Pi(\alpha)$. Ясно, что либо для всех точек полосы $\Pi(\alpha)$ справедливы неравенства $q_-(u_0, x_0; \alpha) \geqslant u_0 \geqslant q_+(u_0, x_0; \alpha)$, либо для всех точек полосы $\Pi(\alpha)$ справедливы противоположные неравенства $q_-(u_0, x_0; \alpha) \leqslant u_0 \leqslant q_+(u_0, x_0; \alpha)$. В первом случае будем говорить, что гистерон α *имеет положительный спин*, а во втором — *отрицательный*.

Если в формуле (3) $g(x, u; \alpha) = E$, $l_-(u; \alpha) = a$, $l_+(u; \alpha) = b$, то гистерон α описывает изменения напряжения в элементарном пластическом теле в модели Прагера; у этого гистерона спин отрицателен. Положителен спин, например, у гистерона α, если в (3) $g(x, u; \alpha) \equiv 0$, $l_-(u; \alpha) = u - 1$, $l_+(u; \alpha) = u + 1$.

Если гистерон α имеет отрицательный спин, то, очевидно,

$$g\,[l_-(u; \alpha), u; \alpha] \geqslant \frac{d}{du} l_-(u; \alpha); \quad g\,[l_+(u; \alpha), u; \alpha] \geqslant \frac{d}{du} l_+(u; \alpha).$$

Для простоты изложения предположим выполненными строгие неравенства

$$g\,[l_-(u; \alpha), u; \alpha] > \frac{d}{du} l_-(u; \alpha); \quad g\,[l_+(u; \alpha), u; \alpha] > \frac{d}{du} l_+(u; \alpha).$$

Аналогично при рассмотрении элементарных гистеронов с положительным спином будем считать, что

$$g\,[l_-(u; \alpha), u; \alpha] < \frac{d}{du} l_-(u; \alpha); \quad g\,[l_+(u; \alpha), u; \alpha] < \frac{d}{du} l_+(u; \alpha).$$

3. Пусть уравнением (1) с правой частью (3) задан элементарный гистерон α с отрицательным спином. Положим

$$m_-(u; \alpha) = q_-[u, l_+(u; \alpha); \alpha], \quad m_+(u; \alpha) = q_+[u, l_-(u; \alpha); \alpha];$$

эти функции обратны друг другу. По гистерону α построим два новых гистерона α_- и α_+ при помощи, соответственно, виброустойчивых уравнений

$$\frac{dq}{dt} = \begin{cases} \max\left\{0, \dfrac{du}{dt} \cdot \dfrac{d}{du} m_-[u(t); \alpha]\right\}, & \text{если} \quad q \leqslant m_-[u(t); \alpha], \\ 0, & \text{если} \quad m_-[u(t); \alpha] < q < u(t), \\ \min\{0, du/dt\}, & \text{если} \quad q \geqslant u(t); \end{cases} \tag{5}$$

$$\frac{dq}{dt} = \begin{cases} \max\{0, du/dt\}, & \text{если} \quad q \leqslant u(t), \\ 0, & \text{если} \quad u(t) < q < m_+[u(t); \alpha], \\ \min\left\{0, \dfrac{du}{dt} \cdot \dfrac{d}{du} m_+[u(t); \alpha]\right\}, & \text{если} \quad q \geqslant m_+[u(t); \alpha]. \end{cases} \tag{6}$$

Оба гистерона α_- и α_+ имеют положительный спин. Решения виброустойчивых уравнений (5) и (6) обозначим соответственно

$$q(t) = W[t_0, q_0; \alpha_-]u(t), \quad q(t) = W[t_0, q_0; \alpha_+]u(t).$$

Теорема 1. *При каждом непрерывном управлении и при любых начальных данных справедливы тождества*

$$W[t_0, q_0; \alpha_-]u(t) = q_-\{u(t), W[t_0, p_0; \alpha]u(t); \alpha\},$$

$$p_0 = p\{u(t_0),\, q_0,\, l_-[u(t_0);\, \alpha];\, \alpha\};$$

$$W[t_0,\, x_0;\, \alpha]u(t) = p\{u(t),\, v(t),\, l_-[v(t);\, \alpha];\, \alpha\};$$

$$v(t) = q_-[u(t),\, z(t);\, \alpha], \quad z(t) = W[t_0,\, q_-[u(t_0),\, x_0;\, \alpha];\, \alpha_-]u(t).$$

Эту теорему можно рассматривать как правило замены переменной при операциях со специальными гистеронами. Теорема 1 означает, что для отыскания состояния одного из гистеронов α и α_- достаточно уметь находить состояния второго гистерона.

Справедливо аналогичное теореме 1 утверждение, которое связывает операторы $W[t_0,\, x_0;\, \alpha]$ и $W[t_0,\, q_0;\, \alpha_+]$. Отметим также, что предположение об отрицательности спина гистерона α не ограничивает общность рассмотрения.

4. Пусть снова α — элементарный гистерон с отрицательным (для определенности) спином. Как нетрудно видеть, для любых двух точек $\{u_0,\, x_0\}$, $\{u^*,\, x^*\} \in \Pi(\alpha)$ можно указать такое непрерывное управление $u(t)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant t^*$), что $u(t_0) = u_0$, $u(t^*) = u^*$ и

$$W[t_0,\, x_0;\, \alpha]u(t^*) = x^*.$$

Перейдем к рассмотрению системы М из двух гистеронов α и β; пусть, для определенности, оба гистерона имеют отрицательный спин. Состояние системы М естественно характеризовать тройкой чисел $\{u,\, x,\, y\}$, где $\{u,\, x\} \in \Pi(\alpha)$ и $\{u,\, y\} \in \Pi(\beta)$. Состояние $\{u^*,\, x^*,\, y^*\}$ назовем п р а в и л ь н ы м, если в него можно перейти из любого другого состояния при помощи некоторого управления. Иначе говоря, состояние $\{u^*,\, x^*,\, y^*\}$ правильное, если для любого другого состояния $\{u_0,\, x_0,\, y_0\}$ можно указать такое непрерывное управление $u(t)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant t^*$), что $u(t_0) = u_0$, $u(t^*) = u^*$ и

$$W[t_0,\, x_0;\, \alpha]u(t^*) = x^*, \quad W[t_0,\, y_0;\, \beta]u(t^*) = y^*.$$

Не каждое состояние системы из двух гистеронов правильное.

Т е о р е м а 2. *Состояние $\{u,\, x,\, y\}$ системы из двух гистеронов α и β правильно в том и только том случае, если*

$$[q_-(u,\, x;\, \alpha) - q_-(u,\, y;\, \beta)][q_+(u,\, x;\, \alpha) - q_+(u,\, y;\, \beta)] \leqslant 0.$$

5. Пусть теперь М — система из произвольного конечного числа элементарных гистеронов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; снова будем считать, что каждый из гистеронов системы имеет отрицательный спин. Состояния системы будут описываться векторами $\{u,\, x_1, \ldots, x_k\}$, где $\{u,\, x_j\} \in \Pi(\alpha_j)$ ($j = 1, \ldots, k$). Состояние системы снова назовем правильным, если в него можно перейти от любого другого состояния при помощи некоторого управления.

Т е о р е м а 3. *Состояние $\{u,\, x_1, \ldots, x_k\}$ системы* М *правильное в том и только том случае, если для любых двух гистеронов α_i и α_j системы* М *состояние $\{u,\, x_i,\, x_j\}$ правильное.*

Ясно, что при любом управлении правильные состояния переходят в правильные. Каждое (не обязательно правильное) состояние $\{u_0,\, x_1^0, \ldots, x_k^0\}$ при управлении $u(t)$ ($u(t_0) = u_0$) обязательно переходит в момент $t = t_1$ в правильное состояние, если на промежутке $[t_0,\, t_1]$ функция $u(t)$ принимает хотя бы один раз значение, лежащее вне интервала $(r_-,\, r_+)$, где

$$r_- = \min_i q_-(u_0,\, x_i^0,\, \alpha_i), \quad r_+ = \max_i q_+(u_0,\, x_i^0;\, \alpha_i).$$

6. Состояние бесконечной системы М гистеронов α определяется парой $\{u,\, x(\alpha)\}$ ($\alpha \in M$); естественным образом определяется понятие правильного состояния. Для простоты формулировки основной теоремы снова будем предполагать, что все гистероны системы М имеют отрицательный

...и что при каждом фиксированном u функция $q_+[u, l_-(u; \alpha); \alpha]$ ограничена на М.

Теорема 4. *Состояние $\{u_0, x_0(\alpha)\}$ системы* М *правильно в том и только том случае, если выполнены следующие условия:*

а) *для любой пары гистеронов $\alpha_1, \alpha_2 \in$ М состояние $\{u_0, x_0(\alpha_1), x_0(\alpha_2)\}$ правильное,*

б) *можно указать такую последовательность чисел $v_j \to u_0$ и такую функцию $j(\alpha)$ $(\alpha \in$ М$)$ с целочисленными положительными значениями, что*

$$\{v_{j(\alpha)} - q_-[u_0, x_0(\alpha); \alpha]\}\{v_{j(\alpha)} - q_+[u_0, x_0(\alpha); \alpha]\} = 0 \quad (\alpha \in M).$$

Поступило
8 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Prager, J. Appl. Mech., 23, № 4, 493 (1956). [2] J. F. Besseling, Net. Aero. Res. Inst. Amsterdam. Rep. S-410 (1953). [3] J. F. Besseling, J. Appl. Mech., 25, № 4 (1958). [4] А. М. Ишлинский, Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 583 (1944). [5] М. А. Красносельский, Б. М. Даринский и др., ДАН, 190, № 1, 34 (1970). [6] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, ДАН, 195, № 3, 544 (1970).