Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 6

УДК 532

ГИДРОМЕХАНИКА

Л. М. АЛЕКСЕЕВА

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ САМОВОЗБУЖДЕНИЕ В ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком М. Д. Миллионщиковым 14 IV 1971)

В общепринятых обозначениях, положив

$$\mathbf{W} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \tag{1}$$

мы можем записать уравнение Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в виде

$$\partial \mathbf{v} / \partial t = -\nabla (p / \rho + v^2 / 2) + [\mathbf{vw}] - \nu\,\mathrm{rot}\,\mathbf{W}. \tag{2}$$

Вместе с условием

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

уравнения (1) и (2) дают полную систему уравнений гидромеханики. Для решения ее можно воспользоваться методом разложения по полуцелым степеням малого параметра, который был предложен в ([1]) для уравнения индукции в теории гидромагнитного динамо:

$$\partial \mathbf{A} / \partial t + \nabla \Phi - [\mathbf{vB}] = -D_m\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{A}$ — векторный потенциал магнитного поля, $\mathbf{B}$ — его напряженность, Φ — скалярный потенциал, $D_m = c^2 / (4\pi\sigma)$ — коэффициент диффузии магнитного поля, σ — проводимость среды. Уравнение (4) точно совпадает по виду с уравнением (2), причем вектору $\mathbf{B}$ соответствует $\mathbf{W} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$. Это позволяет надеяться найти в гидромеханике эффект, аналогичный эффекту самовозбуждения магнитного поля в электродинамике *. В электродинамике задается несимметричный поток жидкости $\mathbf{v}$. Энергия, которая тратится на поддержание этого потока, преобразуется в э.д.с., и электрический ток в системе не затухает, несмотря на малое, но конечное сопротивление среды. Более того, именно при ненулевом сопротивлении и работает этот механизм преобразования, в результате которого мы получаем симметричный ток.

В гидромеханике электрическому току соответствует величина $\mathrm{rot}\,\mathbf{W} = -\Delta\mathbf{v}$, незатуханием или нарастанием этой величины со временем можно объяснить существование в средах с малой, но конечной вязкостью концентрированных вихрей (различных смерчей, водоворотов при стоке и пр.). Замечательно, что все эти образования имеют симметричную компоненту вращения. (Несимметричные течения легко получаются при развитии идеальных неустойчивостей, примером могут служить неустойчивые потоки Куэтта, в которых на фоне равновесного движения возникают ячейки, вращающиеся в противоположных направлениях.)

Ниже будут рассмотрены две задачи.

1) О разложении системы (1) — (3) по степеням малого параметра, что позволит выявить составляющие скорости соответствующих порядков $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)} + \ldots$ Это разложение $\mathbf{v}$ будет использовано при исследовании течения на устойчивость, где $\mathbf{v}$ будет представлять скорость основного (невозмущенного) потока.

---

* Наглядные представления теории динамо пришли в электродинамику из гидромеханики ([2]), но расчет электромагнитного динамо оказался проще, поскольку для него $\mathbf{v}$ можно задать кинематически.

2) Решение задачи об устойчивости потока **v**.

Мы будем рассматривать винтовые потоки, все величины которых зависят только от радиуса r и $\gamma = kz + l\varphi$ — индекса винтовой поверхности, т. е. остаются неизменными вдоль вектора $\mathbf{w} = -krq\mathbf{e}_\varphi + lq\mathbf{e}_z$, касательного к линии $\gamma = \mathrm{const}$ $(q = [k^2r^2 + l^2]^{-1})$. Винтовые потоки представляют самый общий вид двупараметрического течения [3]. Как показал Лорц [4], электромагнитное динамо может иметь винтовую симметрию.

Для решения задачи достаточно воспользоваться w-компонентой уравнения Навье — Стокса и w-компонентой ротора этого уравнения. Третье уравнение, которое можно извлечь из (2), определяет $\partial p / \partial r$ и в дальнейшем использоваться не будет. Соленоидальные векторы **v** и **W** можно записать через функции тока [3, 4]:

$$\mathbf{v} = g\mathbf{w} + [\mathbf{w} \nabla G], \qquad \mathbf{W} = f\mathbf{w} - (\mathbf{w} \nabla g),$$

где G — функция потока вектора **v**, $(-g)$ — функция потока его ротора, f имеет аналогичный смысл, причем

$$f = q^{-1}LG - 2klqg, \tag{5}$$

где

$$L = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rq \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2};$$

w — компонента уравнения (2) при этом приобретает вид:

$$r\,\partial g/\partial t - \nu r\,(q^{-1}Lg + 2klqf) - \overset{\gamma}{g}\dot{G} - \dot{g}\overset{\gamma}{G} = 0. \tag{6}$$

Здесь «$\cdot$» и «γ» означают соответственно дифференцирование по переменным r и γ. Теперь сложим w-компоненту ротора (2) с уравнением (5), умноженным на $2klq$:

$$-\,r\,(\partial/\partial t)\,LG + \nu rLf + (\dot{q}f)\overset{\gamma}{G} - (q\overset{\gamma}{f})\dot{G} + \dot{q}g\overset{\gamma}{g} = 0. \tag{7}$$

(5, 6, 7) дают систему уравнений для функций g, G, f. Система содержит числовой множитель ν, который может быть задан произвольно. Свяжем с ним первую степень малого параметра ε. Того же порядка малости должны быть и члены, содержащие $(\partial / \partial t)$ и описывающие перестройку потока из-за вязкости. Выделим симметричные и асимметричные части величин, обозначив

$$\langle x \rangle = (2\pi l)^{-1} \int x\,d\gamma, \qquad x' = x - \langle x \rangle,$$

и будем считать малым асимметричное искажение цилиндрического потока, а именно, $x' \sim \varepsilon^{1/2}x$.

Теперь разобьем систему (5) — (7) на симметричную и асимметричную части.

$$\begin{gathered}
r\partial\langle g\rangle/\partial t - \nu r\,(q^{-1}L\langle g\rangle + 2klq\langle f\rangle) + \langle \overset{\gamma}{g'}\dot{G}' - \dot{g}'\overset{\gamma}{G'}\rangle = 0,\\
-\,r\,(\partial/\partial t)\langle LG\rangle + \nu rL\langle f\rangle + \langle(\dot{q}f')\overset{\gamma}{G'} - (\overset{\gamma}{q}f')\dot{G}'\rangle = 0,\\
\langle f\rangle = q^{-1}L\langle G\rangle - 2klq\langle g\rangle;
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
r\,\partial g'/\partial t - \nu r\,(q^{-1}Lg' + 2klqf') + \overset{\gamma}{g'}\langle\dot{G}\rangle - \langle\dot{g}\rangle\overset{\gamma}{G'} + \Sigma_1' = 0,\\
-\,r\,(\partial/\partial t)\,LG' + \nu rLf' - \langle(\dot{q}f)\overset{\gamma}{G'} - (\overset{\gamma}{q}f')\langle\dot{G}\rangle + \dot{q}\langle g\rangle\overset{\gamma}{g'} + \dot{q}g'\overset{\gamma}{g'} + \Sigma_2' = 0,\\
f' = q^{-1}LG' - 2klqg',\\
\Sigma_2' = (\dot{q}f')\overset{\gamma}{G'} - (\overset{\gamma}{q}f')\dot{G}' - \langle(\dot{q}f')\overset{\gamma}{G'} - (\overset{\gamma}{q}f)\dot{G}'\rangle,\\
\Sigma_1' = \overset{\gamma}{g'}\dot{G}' - \dot{g}'\overset{\gamma}{G'} - \langle\overset{\gamma}{g'}\dot{G}' - \dot{g}'\overset{\gamma}{G'}\rangle.
\end{gathered} \tag{9}$$

Найдя асимметричные величины соответствующего порядка из системы (9), подставим их затем в (8). При этом оказывается, что разложение **v** будет иметь вид $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}_0(r) + \mathbf{v}_0^{(2)}\ (r) + \ldots$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)} + \ldots$ * Для решения задачи об устойчивости нам понадобятся только члены разложения $\mathbf{v}_0(r)$ и $\mathbf{v}^{(1)}(r, \gamma)$ равновесного потока (остальные члены выпадут из уравнений). Поэтому выпишем только скорость $\mathbf{v}^{(1)}$, которая представляет собой малое искажение $\mathbf{v}_0(r)$ и определяется фактически из линеаризованного уравнения Эйлера:

$$g^{(1)} = tG^{(1)}, \quad qf^{(1)} = \xi G^{(1)}, \quad t = \dot{g}_0/\dot{G}_0, \quad \xi = ((q\dot{}f_0) + qg_0t)/\dot{G}_0;$$
$$LG^{(1)} = (\xi + 2klq^2t)\ G^{(1)}. \tag{10}$$

В задаче на устойчивость $\mathbf{v} \to \mathbf{v} + \mathbf{u}e^{\sigma t}$ и линеаризованное уравнение (2) имеет вид

$$\sigma\mathbf{u} = -\nabla\,(p_u / \rho + \mathbf{vu}) + [\mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{v}] + [\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{u}] + \nu\Delta\mathbf{u}.$$

Введем функции тока для возмущения:

$$\mathbf{u} = h\mathbf{w} + [\mathbf{w}\,\nabla\,\mathbf{H}], \qquad \operatorname{rot}\mathbf{u} = p\mathbf{w} - [\mathbf{w}\,\nabla\,\mathbf{h}].$$

Будем искать возмущения, у которых симметричная часть скорости много меньше асимметричной:

$$u_0 \sim \varepsilon^{1/2} u'. \tag{11}$$

Для идентичности рассуждений будем считать $u' \sim \varepsilon^{1/2} D$, где D — произвольно малая величина, характеризующая возмущение. Тогда по (11) $u_0 \sim \varepsilon D$. Для u_0 имеем из (8):

$$\nu r L p_0 - \sigma r L H_0 + (\partial/\partial r)\langle qf' \overset{\gamma}{H'} \rangle + (\partial/\partial r)\langle qp' \overset{\gamma}{G'} \rangle = 0,$$
$$-\nu r\,(q^{-1}Lh_0 + 2klqp_0) + r\sigma h_0 - (\partial/\partial r)\langle g' \overset{\gamma}{H'} \rangle - (\partial/\partial r)\langle h' \overset{\gamma}{G} \rangle = 0, \tag{12}$$
$$q^{-1}LH_0 - 2klqh_0 = p_0.$$

Члены типа $(\partial / \partial r)\langle qf' \overset{\gamma}{H'} \rangle$ в системе (12), соответствующие э.д.с. в электродинамике, должны иметь $\sim \varepsilon^2$, поэтому следует провести решение до шага $n = 4$. На первом шаге $n = 1$ из линеаризованной системы (9) (здесь она не приводится) следует, что $\mathbf{u}^{(1)}$ по виду совпадает с полем $\mathbf{v}^{(1)}$, отличаясь от него только числовым множителем. Обозначая нормированное на единицу в максимуме решение $\chi(r)$ уравнения (10) и используя выражение для радиальной скорости винтового потока $v_r = -\overset{\gamma}{G} / r$; $G \sim e^{im\gamma}$, имеем

$$G^{(1)} = G_*^{(1)}\chi = \frac{i}{m}\,(rv_r^{(1)})_*\,\chi, \qquad H^{(1)} = \frac{i}{m}\,(ru_r')_*\chi,$$

где $*$ означает, что величина взята в точке максимума $\chi(r)$.

Теперь систему (12) можно записать в окончательном виде

$$r\sigma h_0 - \nu r\,(q^{-1}Lh_0 + 2klqp_0) = \nu\,(v_r' u_r')_*\Gamma_1(r),$$
$$-rq\,(\sigma \dot{H}_0 + \nu p_0) = \nu\,(v_r' u_r')_*\Gamma_2(r), \tag{13}$$
$$q^{-1}LH_0 - 2klqh_0 = p_0,$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{r_*^2}{m^2}\dot{P}, \qquad P = \frac{r\chi}{q\dot{G}_0}\left\{2L\,(t\chi) + 2klq\xi\chi - \frac{q\sigma t\chi}{\nu}\right\},$$
$$\Gamma_2 = \frac{r_*^2}{m^2}\left\{\frac{g_0 q}{\dot{G}_0}\,P + \frac{r\chi}{\dot{G}_0}\,[2L\,(\xi q^{-1}\chi) - \frac{\sigma}{\nu}\,L\,(t\chi)]\right\}.$$

---

* Индекс (n) означает член $n/2$ порядка малости, т. е. $v^{(1)} \sim \varepsilon^{1/2}$, $v^{(2)} \sim \varepsilon$, ...

(13) представляет систему обыкновенных дифференциальных уравнений для цилиндрического течения под действием некоторой силы в винтовой системе координат (с определенным k и l). Она решается при любом значении инкремента σ ($\sigma \leqslant \nu R^{-2}$), причем при $\sigma = 0$ система распадается на отдельные уравнения. При $\sigma \neq 0$ нужно в системе (13) перейти к цилиндрическим координатам, где разделяются уравнения для $u_{0\varphi}$ и u_{0z}. Решение найдется стандартным образом — разложением по собственным функциям соответствующей однородной системы *.

Таким образом, динамо-неустойчивость потока имеет место всегда, когда выполняются предположения, приведшие нас к системе (13).

В системе (13) величины Γ_1 и Γ_2 определяются основным потоком $v_0(r)$ и структурой его искажения $v^{(1)}$ и не зависят от амплитуд v_{r*}' и u_{r*}', с которыми связывается степень параметра ε. Поэтому необходимым и достаточным условием вращательного самовозбуждения с инкрементом σ на стационарном потоке $(v_0(r) + v^{(1)})$ является принадлежность Γ к нулевому порядку по ε, т. е.

$$\varepsilon^{1/2-\sigma} < \begin{matrix}\Gamma_1^\sigma \\ \Gamma_2^\sigma\end{matrix} < \varepsilon^{-1/2+\delta}, \qquad \delta \gtrsim 0. \tag{14}$$

При достаточно малом ε (14) выполняется всегда. И это естественно, поскольку при $\varepsilon \to 0$, $\nu \to 0$ как ε, тогда как v_{r*}' как $\varepsilon^{1/2}$, т. е. в пределе $\varepsilon \to 0$ мы имеем дело с искаженным потоком невязкой жидкости. Таким образом, искажение потока v_{r*}' является дестабилизирующим фактором. Поскольку $u_* \sim \varepsilon^{1/2} u'$, то при слишком малом ε к.п.д. механизма динамо стремится к нулю. Поэтому эффективно действовать динамо-механизм будет только для тех (k и l), которые дают не слишком высокие Γ_1^σ, Γ_2^σ.

В заключение автор благодарит Л. С. Соловьева, Б. А. Тверского и А. В. Гетлинга за обсуждение результатов, а также В. В. Петкевича за интерес к работе.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Брагинский, ЖЭТФ, 47, в. 3, 1084 (1964). [2] G. K. Batchelor, Proc. Roy. Soc. A, **201**, 405 (1950); русск. пер.: Пробл. совр. физ., № 2, 134 (1954). [3] Л. С. Соловьев, Сборн. Вопросы теории плазмы, в. 3, 1963. [4] D. Lortz, Plasma Phys., 10, 967 (1968).

* Имеется в виду течение в круглой трубе, так что $v^{(1)}|_R \sim \chi(R) = 0$, $u_{0\varphi}|_R = u_{0z}|_R = 0$.