Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 5

УДК 517.949.8 *МАТЕМАТИКА*

Н. Н. КУЗНЕЦОВ

СЛАБАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 22 VI 1971)

При исследовании поведения конечно-разностных аппроксимаций в областях, где решения аппроксимируемых дифференциальных задач имеют плохую гладкость, целесообразно пользоваться слабыми топологиями. Такой подход позволяет выделить те эффекты неустойчивости, которые не устраняются простейшими процедурами сглаживания решений, повышения гладкости начальных данных и т. п. В этой заметке исследуется слабая устойчивость разностных схем и вопросы сходимости. При рассмотрении асимптотики мы ограничиваемся здесь только так называемыми коммутативными схемами. В сильных топологиях соответствующие вопросы для различных классов разностных схем изучались многими авторами. Весьма полная теория устойчивости в гильбертовых пространствах развита в [1, 2]. Из работ, посвященных асимптотике, укажем на статьи [3–7].

Разностные схемы рассматриваются в этой заметке на «плавающей» сетке. Это делается, чтобы не вводить пространств сеточных функций, хотя и более естественных с точки зрения численного анализа, но требующих более громоздких записей.

1. Слабо устойчивые разностные схемы. Пусть E_d — эвклидово пространство, F — некоторое линейное пространство L-мерных векторных комплексно-значных функций на E_d. Обозначим D_s оператор сдвига $u(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_d) \to u(x_1, \ldots, x_s + h_s, \ldots, x_d)$ и положим $D^k = D_1^{k_1} \ldots D_d^{k_d}$, где $k = (k_1, \ldots, k_d)$ — целочисленный мультииндекс.

Пусть S — полоса $E_d \times \{0 \leqslant t \leqslant T\}$. Вводя параметр τ, $0 < \tau < \tau_0$ и фиксируя функции $h_s = a_s \tau^{\alpha_s}$, $a_s > 0$, $\alpha_s > 0$, рассмотрим в S разностную схему

$$\mathscr{L}_\tau^0(t^n) u^{n+1} = \mathscr{L}_\tau^1(t^n) u^n + \tau f_\tau^n, \quad u^0 = \varphi_\tau, \tag{1}$$

где $\mathscr{L}_\tau^\alpha(t)$ — конечно-разностные операторы вида $\sum\limits_k C_k^\alpha D^k$ с коэффициентами $C_k^\alpha(t, x; \tau)$, бесконечно дифференцируемыми по t, x в S при каждом значении τ, $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$, $N_\tau = [\tau^{-1}T]$; φ_τ, $f_\tau^n = f_\tau(t^n)$ — заданные элементы F. Если $\{u^n\} \in F$ — решение схемы (1), обозначаем $u_\tau(t)$ функцию (со значениями в F), получаемую линейной интерполяцией между значениями $t^n = n\tau$. Конечно-разностный оператор $\mathscr{L}_\tau^\alpha$ имеет конечный порядок, если $C_k^\alpha = 0$ при достаточно большом $|k| = |k_1| + \ldots + |k_d|$, и бесконечный порядок в противном случае.

Положим для числового вектора $a = (a_1, \ldots, a_L)$ $|a|_p = \left(\sum\limits_\alpha |a_\alpha|^p\right)^{1/p}$ и обозначим F_p пространство бесконечно дифференцируемых функций с топологией, заданной полунормами $|g|_{p,m}$ $m = 0, 1, \ldots$, где

$$|g|_{p,0} = \left(\int\limits_{E_d} |g(x)|_p^p \, dx\right)^{1/p}, \quad |g|_{p,m} = \left(\sum_{|k| \leqslant m} |\mathscr{D}^k g|_{p,0}^p\right)^{1/p} \quad \left(\mathscr{D}_s = \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$$

$$(1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Фиксируем p и обозначим F пространство распределений над F_q ($q^{-1} = 1 - p^{-1}$), полагая для $m \leqslant 0$ $|u|_m = \sup\limits_{|g|_{q,-m} \leqslant 1} |u(g)|$, а для $m > 0$ $|u|_m = \left(\sum\limits_{|k| \leqslant m} |\mathcal{D}^k u|_0^p \right)^{1/p}$. Для каждого элемента $u \in F$ существует такое m_u, что $|u|_m < \infty$ при $m \leqslant m_u$.

Будем называть схему (1) *регулярной*, если уравнение $\mathcal{L}_\tau^0 u = v$ разрешимо в F для каждого $v \in F$ и существуют такие s, a_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$, не зависящие от t, τ, что

$$|u|_{m-s} \leqslant a_m |\mathcal{L}_\tau^0 u|_m$$

(для всех m, при которых $|\mathcal{L}_\tau^0 u|_m < \infty$).

Пусть $R_\tau(t_1, t_0)$ — разрешающий оператор схемы (1) ($0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \tau N_\tau$), т. е. оператор, дающий решение схемы

$$\mathcal{L}_\tau^0 u^{n+1} = \mathcal{L}_\tau^1 u^n \tag{2}$$

с начальным условием, поставленным при $t = t_0$.

Разностную схему (1) называем *устойчивой*, если она регулярна и $R_\tau(t_1, t_0)$ ограничен в F равномерно относительно τ, t_0, t_1 в том смысле, что для некоторых l, C_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$, не зависящих от τ, t_0, t_1,

$$|R_\tau(t_1, t_0) u|_{m-l} \leqslant C_m |u|_m$$

(для всех m, при которых $|u|_m < \infty$). Об устойчивости в смысле этого определения говорим также как о слабой устойчивости.

Решение устойчивой схемы допускает оценку

$$|u_\tau(t)|_m \leqslant C_{m+l} \{|\varphi_\tau|_{m+l} + t a_{m+l+s} \sup_{t' \leqslant t} |f_\tau(t')|_{m+l+s}\} \tag{3}$$

(для всех m, при которых правая часть конечна).

Выделим следующий класс разностных операторов с постоянными коэффициентами:

$$\mathcal{L}_\tau^\alpha = E + \tau \sum_j \sum_{0 \leqslant k \leqslant m^\alpha} A_j^{\alpha, k}(\tau) D^{-j} \partial^k, \tag{4}$$

где $A_j^{\alpha, k}(\tau)$ — многочлены относительно τ, $\partial_s = h_s^{-1}(T_s - E)$. Пусть операторы $\mathcal{L}_\tau^\alpha$ в схеме (1) имеют вид (4) и их порядок конечен. Обозначим $\hat{\mathcal{L}}_\tau^\alpha(\xi)$ функции, получающиеся формальной заменой символа D_s в (4) на $\exp(i\xi_s)$. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма числовой матрицы.

Теорема 1. *Если* $\|\{\hat{\mathcal{L}}_\tau^0(\xi)\}^{-1}\| \leqslant a$ *и собственные числа* $\lambda(\xi, \tau)$ *матрицы* $\{\hat{\mathcal{L}}_\tau^0(\xi)\}^{-1}\{\hat{\mathcal{L}}_\tau^1(\xi)\}$ *удовлетворяют условию Неймана* $|\lambda(\xi, \tau)| \leqslant 1 + b\tau$ (a, b *не зависят от* ξ, τ), *то схема* (1) *устойчива*.

2. Слабо устойчивые аппроксимации дифференциальных уравнений. Рассмотрим в S задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\partial u / \partial t = \mathcal{L}(t) u, \quad u|_{t=0} = \varphi \tag{5}$$

$\left(\mathcal{L}(t) = \sum\limits_{|k| \leqslant M} Q_k(t, x) \mathcal{D}^k \right)$, корректную в пространстве F. Разрешающий оператор задачи (5) обозначаем $R(t_1, t_0)$, $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$.

Разностная схема (2) с начальным условием $u_\tau^0 = \varphi_\tau$, по определению, аппроксимирует задачу (5), если $\varphi_\tau - \varphi \to 0$ в F при $\tau \to 0$ и *оператор погрешности аппроксимации*

$$\varepsilon_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \{\mathcal{L}_\tau^0(t) R(t + \tau, t) - \mathcal{L}_\tau^1(\tau)\}$$

стремится к нулю при $\tau \to 0$ равномерно относительно t в том смысле, что для некоторого r, не зависящего от t и τ, и некоторой непрерывной функции $\varepsilon(\tau)$, $\varepsilon(0)=0$,

$$|\varepsilon_\tau(t)v|_m \leqslant \varepsilon(\tau)\,|v|_{m+r}, \quad v\in F,$$

для всех m, при которых правая часть конечна (в этом определении считается, что $\mathscr{L}_\tau^0$ аппроксимирует единичный оператор).

Пусть операторы $\mathscr{L}_\tau^\alpha(t)$ допускают представление

$$\mathscr{L}_\tau^\alpha(t)=E+\tau\mathscr{L}^\alpha(t)+\tau^{1+\gamma_\alpha}\tilde{\mathscr{L}}_\tau^\alpha(t), \quad \gamma_\alpha>0, \tag{6}$$

где операторы $\mathscr{L}^\alpha(t)$ и $\tilde{\mathscr{L}}_\tau^\alpha(t)$ ограничены в F равномерно относительно своих аргументов, и то же имеет место для производных по t и по x (т. е. коммутаторов $\mathscr{D}^m\mathscr{L}^\alpha-\mathscr{L}^\alpha\mathscr{D}^m,\ldots$) всех порядков.

Назовем замыканием разностной схемы (2) уравнение (5), где $\mathscr{L}(t)=\mathscr{L}^1(t)-\mathscr{L}^0(t)$.

Теорема 2. *Пусть разностная схема* (2) *устойчива и операторы* $\mathscr{L}_\tau^\alpha$ *допускают представление* (6).

Тогда задача Коши для замыкания схемы корректна в F и схема (2) *является ее аппроксимацией.*

В силу аппроксимации, имеет место сходимость разностного решения $u_\tau(t)$ в F к точному решению $u(t)$ (равномерная относительно t) (теорема Филиппова), а также вытекающая из (3) оценка погрешности $u_\tau-u$:

$$|u_\tau(t)-u(t)|_m\leqslant C_{m+l}\{|\varphi_\tau-\varphi|_{m+l}+ta_{m+l+s}\,\varepsilon(\tau)\sup_{t'\leqslant t}|u(t')|_{m+s+l+r}\}.$$

Пусть оператор погрешности аппроксимации допускает представление

$$\varepsilon_\tau(t)=\tau^{m_0}\varepsilon_0(t)+\tau^{m_1}\bar{\varepsilon}_\tau(t), \quad m_1>m_0,$$

где операторы ε_0 и $\bar{\varepsilon}_\tau$ ограничены в F равномерно относительно своих аргументов. Пусть $u(t)$ — решение задачи (5), $z(t)$ — решение задачи

$$\partial z/\partial t=\mathscr{L}(t)z-\varepsilon_0(t)u(t), \quad z|_{t=0}=0.$$

Тогда при $\varphi_\tau=\varphi$

$$u_\tau(t)=u(t)+\tau^{m_0}z(t)+o(\tau^{m_0}), \tag{7}$$

где символ o понимается в смысле топологии пространства F. При дополнительных предположениях об операторах $\bar{\varepsilon}_\tau$ и $\tilde{\mathscr{L}}_\tau^0$ легко построить дальнейшие поправки к асимптотической формуле (7).

С разложением (7) естественно связана задача

$$\partial v_\tau/\partial t=(\mathscr{L}(t)-\tau^{m_0}\varepsilon_0(t))v_\tau, \quad v_\tau|_{t=0}=\varphi, \tag{8}$$

называемая первым дифференциальным приближением разностной схемы [8, 9]. Имеет место утверждение: *если разрешающий оператор $R(t,t_0,\tau)$ уравнения* (8) *ограничен в F равномерно относительно t, t_0, τ (т. е. задача* (8) *корректна в F равномерно по τ), то* $u_\tau-v_\tau=o(\tau^{m_0})$. Можно рассматривать и следующие дифференциальные приближения разностной схемы. Для них верны аналогичные утверждения. К сожалению, равномерная корректность задачи (8) лишь для узкого класса аппроксимаций является следствием устойчивости разностной схемы.

3. Асимптотика решений коммутативных разностных схем. В дальнейшем ограничимся разностными схемами с постоянными коэффициентами. Введем оператор погрешности $\mathscr{E}_\tau(t)$: $u(t)\to u_\tau(t)$, определенный на пространстве точных решений задачи (5). Поскольку в случае постоянных коэффициентов однозначность обратного оператора $[R(t,0)]^{-1}$ есть следствие корректности задачи, то для устойчивой разностной аппроксимации определение $\mathscr{E}_\tau$ корректно. Впервые оператор погрешности рассматривался в [3] (там же было введено используемое ниже понятие индекса схемы).

Назовем разностную схему коммутативной (в первом приближении), если операторы $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\mathscr{D})$ и $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\mathscr{D})$ коммутируют. Будем, далее, говорить, что **разностная схема имеет индекс** s, если $\varepsilon_0(\xi)$ есть однородный многочлен степени s.

Обозначим M_ν оператор сглаживания: $M_\nu u = \Omega_\nu * u$, где $\Omega_\nu(x) = (\nu_1\nu_2\ldots\nu_d)^{-1}\,\Omega(x/\nu)$. Матричную функцию $\Omega(x)$ будем называть **ядром**, а $\nu = (\nu_1,\ldots\nu_d)$ — **радиусом сглаживания**.

Теорема 3. *Если коммутативная разностная схема имеет индекс* s, *то* $\mathscr{E}_\tau(t) = M_\nu + o(\tau^{m_0})$, *где* M_ν — *оператор сглаживания с некоторым бесконечно дифференцируемым ядром* $\Omega(x)$, *которое можно выбрать финитным*, $\nu_j = c_j(t\tau^{m_0})^{1/s}$.

Пусть $\lambda(y)$ — четная неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $|y| > 1$ (или быстро убывающая на бесконечности) и удовлетворяющая условию

$$\int \lambda(y)\,dy = 1.$$

Пусть $\omega(x) = \lambda(x_1)\ldots\lambda(x_d)$, $Q_s(x)$ — алгебраические многочлены, ортогональные с весом ω, $q_s{}^2 = \int \omega_0 Q_s{}^2 dx$. Пусть многочлен $\varepsilon_0(\xi) = \sum\limits_{|l|=s} \frac{1}{l!} M_l \xi^l$, где s — индекс схемы. Тогда в качестве ядра сглаживания $\Omega(x)$ можно выбрать функцию (в диагональном представлении)

$$\Omega(x) = \omega(x)\Big(\omega_s(x) + \sum_{|r|=s} b_r Q_r(x)\Big),$$

$$\omega_s(x) = \sum_{|r|=\left[\frac{s-1}{2}\right]} \frac{1}{q_{2r}^2}\, Q_{2r}(0)\,\frac{Q_{2r+1}(x)}{x_1x_2\ldots x_d},$$

$$b_r = \frac{1}{q_r^2}\left(Q_r(0) - \frac{M_r}{c_r}\right).$$

Если индекс схемы s четен и $\varepsilon_0(i\xi) \geqslant \varkappa^2|\xi|^s E$, то в качестве ядра сглаживания $\Omega_\nu(x)$ можно выбрать функцию

$$\Omega_\nu(x) = e^{-t\tau^{m_0}\varepsilon_0(\mathscr{D})}\,\delta(x)\,E = e^{-\varepsilon_0(\nu\mathscr{D})}\,\delta(x)\,E.$$

Аналогичную асимптотическую теорему можно доказать и в случае, когда $\varepsilon_0(\xi)$ — произвольный многочлен степени s. Обратим внимание на локальный характер оператора погрешности в рассматриваемом случае: разностное решение в некоторой точке определяется значениями точного решения из ν-окрестности этой точки.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 7, № 5, 1096 (1967). [2] А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4, 808 (1968). [3] А. И. Жуков, УМН, 14, № 3 (1959). [4] В. Я. Урм, ДАН, 139, № 1 (1961). [5] С. И. Сердюкова, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 3, 477 (1966). [6] V. Thomée Numerical Solution of Partial Diff. Equations, Proc. Intern. Symp. 1965, N. Y., 1966. [7] С. И. Сердюкова, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 11, № 2, 411 (1971). [8] Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин, ДАН, 182, № 4 (1968). [9] Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин, Сибирск. матем. журн., 10, № 5 (1969).