Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 5

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

В. Г. ЛИМАНСКИЙ

ТЕОРЕМЫ О СРАВНЕНИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 2 IV 1971)

В этой работе мы выскажем несколько теорем о сравнении для задач

$$y'(t) + f(t, y(s)) = 0, \quad y(t) = \varphi(t), \quad t \in \bar{E}_0; \tag{1}$$

$$\bar{y}'(t) + V_*(t, \bar{y}(s)) = 0, \quad \bar{y}(t) = \bar{\varphi}(t), \quad t \in \bar{E}_1, \tag{2}$$

где $f(t, \alpha(s))$, $V_*(t, \bar{\alpha}(\bar{s}))$ (при фиксированном t) — функционалы, определенные соответственно на непрерывных функциях $\alpha(s)$, $\bar{\alpha}(\bar{s}) \subset C$ $(t - \tau(t) \leqslant s \leqslant t - \theta(t)$, $t - \bar{\tau}(t) \leqslant \bar{s} \leqslant t - \bar{\theta}(t))$; $\theta(t)$, $\bar{\theta}(t)$, $\tau(t)$, $\bar{\tau}(t)$ $(0 \leqslant \theta(t) \leqslant \tau(t)$, $0 \leqslant \bar{\theta}(t) \leqslant \bar{\tau}(t)$, $t \in [t_0, T))$, $\varphi(t)$ $(t \in \bar{E}_0)$, $\bar{\varphi}(t)$ $(t \in \bar{E}_1)$ — заданные непрерывные функции; $\bar{E}_0 = E_0 \cup t_0$, $\bar{E}_1 = E_1 \cup t_0$, $E_0 = \{t - \tau(t)\colon t - \tau(t) < t_0\}$, $E_1 = \{t - \bar{\tau}(t)\colon t - \bar{\tau}(t) < t_0\}$; $T = \mathrm{const} \leqslant \infty$; C — совокупность $\{\alpha(t)\}$ всех непрерывных функций (определенных на множестве $E_0 \cup E_1 \cup [t_0, T))$, каждая из которых удовлетворяет соотношению $\sup|\alpha(t)| \leqslant H_*$ $(0 < H_* = \mathrm{const} \leqslant \infty)$.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения

$$\theta_0 = \inf\theta(t), \quad \Delta_0 = \sup\tau(t), \quad H = \sup|\varphi(t)|, \quad D = \sup_{[t_0,\, T)}|y(t)|.$$

Замечание 1. Существование непрерывно дифференцируемого решения в задаче (1) или в задаче (2) будем предполагать заранее.

В [1] А. Д. Мышкис разработал метод, с помощью которого ему удалось получить ряд интересных свойств решений уравнения $y'(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} y(s)\,dK(t, s) = 0$. В настоящей работе этот метод обобщается на случай задачи (1) (см. также [2]).

На полусегменте $[t_0, T)$ мы часто будем рассматривать функции $y(t)$ и $\bar{y}(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\bar{y}(t_0) = y(t_0), \quad \bar{y}(\bar{c}) = y(c), \quad \bar{y}'(t) < 0,\ t \in [t_0, \bar{c}]; \tag{3}$$

здесь $\bar{c}$, $c \subset (t_0, T)$ — некоторые числа.

Множество точек $W^{(1)}$ определим следующим образом: $W^{(1)} = \{t\colon \bar{y}(t_0) \geqslant y(t) > \bar{y}(\bar{c}),\ t \in [t_0, c]\}$, через $W^{(2)}$ обозначим множество предельных точек $W^{(1)}$, а через W — объединение $W^{(1)} \cup W^{(2)}$.

При условиях (3) введем в рассмотрение функции $\chi(t)$, $\bar{\chi}(t) \subset [t_0\ \bar{c}]$, удовлетворяющие соответственно уравнениям

$$\bar{y}(\chi(t)) = y(t), \quad \bar{y}(\bar{\chi}(t)) = Y(t) \quad (Y(t) = \min_{[t_0,\, t]} y(t)), \quad t \in W.$$

Обозначим через $C_1 \subset C$ класс функций $\{\alpha(t)\}$, в котором каждая удовлетворяет условиям $\alpha(t) = \varphi(t)$ $(t \in \bar{E}_0)$, $\bar{y}(t_0) > \alpha(t)$ $(t \in (t_0, c])$,

$\chi_\alpha'(t) \leqslant 1$ $(\bar y(\chi_\alpha(t)) = \alpha(t),\ \ t \in W)$; через $C_2 \in C$ — класс функций $\{\alpha(t)\}$, в котором каждая удовлетворяет условиям $\alpha(t) = \varphi(t)$ $(t \in E_0)$, $\bar y(t_0) > \alpha(t) \geqslant \bar y(\bar c)$ $(t \in (t_0,\ c])$, $\quad \chi_\alpha'(t) \leqslant 1$ $(\bar y(\chi_\alpha(t)) = \min\limits_{[t_0,t]} \alpha(u)$, $t \in [t_0,\ c])$; и, наконец, через $C_3 \in C_1$ — класс функций $\{\alpha(t)\}$, в котором $\alpha(t) \geqslant \bar y(\bar c) \geqslant 0, t \in [t_0, c]$.

При помощи теорем 1 — 6 оказывается возможным в некоторых случаях выделение ограниченных решений в задачах типа задачи (1).

Теорема 1. *Пусть в задачах* (1), (2) *имеют место условия* (3) *и*

$$\chi'(t) \leqslant 1, \quad t \in W. \tag{4}$$

Тогда

$$\bar c \leqslant c;\quad d\bar y(\chi(t)) / d\chi(t) \leqslant y'(t),\quad t \in W;\quad \bar y(t) \leqslant y(t),\quad t \in (t_0, \bar c]. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть в задачах* (1) *и* (2) *имеют место условия* (3) *и* $\bar y(t_0) > y(t)$, $t \in (t_0,\ c]$; *пусть для каждой функции* $\alpha(t) \in C_1$ *выполняется неравенство*

$$V_*(\chi_\alpha(t), \bar y(\bar s)) \geqslant f(t,\ \alpha(s)), \quad t \in W. \tag{6}$$

Тогда $\chi'(t) \leqslant 1, t \in W$.

Приведем пример задачи (2), в котором для всякой функции $\alpha(t) \in C_1$ имеет место неравенство (6). Пусть $f(t,\ \alpha(s)) \leqslant V(\max \alpha(s))$, где $V(y)$, $y \in [-H_*, H_*]$, есть неубывающая функция. Рассмотрим задачу

$$\bar y'(t) + V(\bar y(t - \bar\tau(t))) = 0, \quad \bar y(t) = \bar\varphi(t), \quad t \in \bar E_1. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть в задачах* (1) *и* (7) *имеют место условия* (3),

$$\begin{gathered} \bar\varphi(\bar t) \geqslant \varphi(t),\ \bar t \leqslant t,\quad \bar t \in \bar E_1,\quad t \in E_0; \\ \bar\tau(\bar t) \geqslant \tau(t),\quad \bar t \leqslant t,\quad \bar t \in [t_0, \bar c],\quad t \in [t_0, c]. \end{gathered} \tag{8}$$

Тогда для всякой функции $\alpha(t) \in C_1$ *выполняется неравенство*

$$V(\bar y(\chi_\alpha(t) - \bar\tau(\chi_\alpha(t)))) \geqslant f(t,\ \alpha(s)), \quad t \in W.$$

Замечание 2. Если в теореме 1 неравенство (4) является строгим, то строгими являются и неравенства (5); если в теореме 2 неравенство (6) является строгим, то $\chi'(t) < 1, t \in W$.

Если в теоремах 1, 2 вместо функций $\chi(t)$ и $y(t)$ написать соответственно функции $\tilde\chi(t)$ и $Y(t)$, вместо множества C_1 — множество C_2, вместо условий (3) — условия

$$\bar y(t_0) = Y(t_0) \quad \bar y(\bar c) = Y(c), \quad \bar y'(t) < 0, \quad t \in [t_0, \bar c), \tag{9}$$

то таким образом переформулированные теоремы остаются справедливыми вместе с замечанием, соответствующим замечанию 2.

Приведем пример задачи (2), в котором для всякой функции $\alpha(t) \in C_2$ выполняется неравенство $V_*(\tilde\chi_\alpha(t),\ \bar y(\bar s)) \geqslant f(t,\ \alpha(s))$, $t \in [t_0,\ c]$. Пусть $f(t, \alpha(s)) \leqslant \bar V(\alpha(s))$ $\quad (\alpha(s) \in C)$, где

$$\bar V(\alpha(s)) = \begin{cases} V_1(\max \alpha(s)) & (\max \alpha(s) \geqslant |\min \alpha(s)|), \\ V_2(\max \alpha(s), |\min \alpha(s)|) & (\max \alpha(s) < |\min \alpha(s)|); \end{cases}$$

здесь $V_1(y)$, $V_2(x, |y|)$, $x, y \subset [-H_*, H_*]$, $|x| \leqslant |y|$,— некоторые непрерывные неубывающие по каждому аргументу функции. Рассмотрим задачу

$$\bar y'(t) + \bar V(\bar y(\bar s)) = 0, \quad \bar y(t) = \bar\varphi(t), \quad t \in \bar E_1. \tag{10}$$

Теорема 4. *Пусть в задачах* (1) *и* (10) *имеют место условия* (8), (9), $\bar\varphi(\bar t) \geqslant |\varphi(t)|$ $(\bar t \leqslant t,\ \bar t \in \bar E_1,\ t \in E_0)$, $\bar y(t - \bar\tau(t)) \geqslant \bar y(t_0)$ $(t \in [t_0, \bar c])$, $\bar\theta(t) \equiv 0$ $(t \in [t_0, \bar c])$.

Тогда для всякой функции $\alpha(t) \in C_2$ *выполняется неравенство*

$$\bar{V}(\bar{y}(\bar{s})) \geqslant f(t, \alpha(s))$$

$$(\bar{\chi}_\alpha(t) - \bar{\tau}(\bar{\chi}_\alpha(t)) \leqslant \bar{s} \leqslant \bar{\chi}_\alpha(t) - \bar{\theta}(\bar{\chi}_\alpha(t)),\ t \in [t_0, c]).$$

Теорема 5. *Пусть в задачах* (1) *и* (2) *имеют место условия* (4), $\bar{y}(t_0) = y(t_0)$, $\bar{y}'(t) < 0$ $(t \in [t_0, \bar{c}))$, $\bar{y}'(\bar{c}) = 0$, $\bar{y}(t_0) > y(t)$ $(t \in (t_0\ c])$.

Тогда $y(t) \geqslant \bar{y}(\bar{c})$, $t \in [t_0, c]$.

Теорема 6. *Пусть в задачах* (1) *и* (2) *имеют место условия* $\bar{y}(t_0) = y(t_0) > y(t)$ $(t \in [t_0, c])$, $\bar{y}'(t) < 0$ $(t \in [t_0, \bar{c}))$, $\bar{y}'(\bar{c}) = 0$, $\chi'(t) \leqslant 1$ $(t \in [t_0, c])$.

Тогда $y(t) \geqslant \bar{y}(\bar{c})$, $t \in [t_0, c]$.

При помощи теорем 7 — 9 мы можем оценить решение задачи (1) сверху.

Теорема 7. *Пусть в задачах* (1) *и* (2) *справедливы условия* (3), $\chi'(t) \geqslant 1$ $(t \in [t_0, c])$, $\bar{y}(t_0) > y(t) \geqslant \bar{y}(\bar{c}) \geqslant 0$ $(t \in [t_0, c])$.

Тогда

$$\bar{c} \geqslant c;\ dy(\chi(t)) / d\chi(t) \geqslant y'(t),\ t \in [t_0, c]; \quad \bar{y}(t) \geqslant y(t),\ t \in (t_0, c]. \tag{11}$$

Теорема 8. *Пусть в задачах* (1) *и* (2) *имеют место условия* (3) *и* $\bar{y}(t_0) > y(t) \geqslant \bar{y}(\bar{c}) \geqslant 0$, $t \in (t_0, c]$; *пусть для всякой функции* $\alpha(t) \in C_3$ *выполняется неравенство*

$$V_*(\chi_\alpha(t), \bar{y}(\bar{s})) \leqslant f(t, \alpha(s)), \quad t \in [t_0, c]. \tag{12}$$

Тогда $\chi'(t) \geqslant 1$, $t \in [t_0, c]$.

Приведем пример задачи (2), в котором для всякой функции $\alpha(t) \in C_3$ выполняется неравенство (12). Пусть $f(t, \alpha(s)) \geqslant v(\min \alpha(s))$, где $\alpha(s) \geqslant 0$, $v(y)$ $(y \in [0, H_*])$ есть неубывающая функция. Рассмотрим задачу

$$\bar{y}'(t) + v(\bar{y}(t - \bar{\tau}(t))) = 0, \quad \bar{y}(t) = \varphi(t), \quad t \in E_1. \tag{13}$$

Теорема 9. *Пусть в задачах* (1) *и* (13) *справедливы условия* (3), $\bar{\tau}(\bar{t}) \leqslant \theta(t)$ $(\bar{t} \geqslant t, \bar{t} \in [t_0, \bar{c}], t \in [t_0, c])$, $|\bar{\varphi}(\bar{t})| \leqslant \varphi(t)$ $(\bar{t} \geqslant t, \bar{t} \in E_1, t \in E_0)$.

Тогда для любой функции $\alpha(t) \in C_3$ *имеет место неравенство*

$$v(\bar{y}(\chi_\alpha(t) - \bar{\tau}(\chi_\alpha(t))) \leqslant f(t, \alpha(s)), \quad t \in [t_0, c].$$

Сформулируем еще две теоремы о сравнении.

Теорема 10. *Пусть в задачах* (1) *и* (2) *выполнены условия* $\bar{y}(t_0) = y(t_0) \leqslant 0$, $y(t) \leqslant 0$ $(t \in [t_0, T))$,

$$V_*(t, \bar{y}(\bar{s})) \geqslant f(t, \alpha(s)) \quad (\bar{y}(t) \leqslant \alpha(t) \leqslant 0,\ t \geqslant t_0,\ \alpha(t) = \varphi(t),\ t \in E_0). \tag{14}$$

Тогда

$$\bar{y}(t) \leqslant y(t), \quad \bar{y}'(t) \leqslant y'(t), \quad t \in [t_0, T). \tag{15}$$

Теорема 11. *Пусть в задачах* (1) *и* (2) *выполнены условия* $\bar{y}(t_0) = y(t_0) \leqslant 0$,

$$V_*(t, \bar{y}(\bar{s})) \geqslant |f(t, \alpha(s))| \quad (|\bar{y}(t)| \geqslant |\alpha(t)|, t \geqslant t_0, \alpha(t) = \varphi(t), t \in E_0). \tag{16}$$

Тогда

$$|\bar{y}(t)| \geqslant |y(t)|, \quad |\bar{y}'(t)| \geqslant |y'(t)|, \quad t \in [t_0, T). \tag{17}$$

Замечание 3. Если в теореме 5 неравенство (4) строгое, то $y(t) > \bar{y}(\bar{c})$, $t \in [t_0, c]$; если в теореме 6 $\chi'(t) < 1$, $t \in [t_0, c]$, то

$y(t) > \bar{y}(\bar{c})$, $t \in [t_0, c]$; если в теореме 7 $\chi'(t) > 1$, $t \in [t_0, c]$, то неравенства (11) строгие; если в теореме 8 неравенство (12) строгое, то $\chi'(t) > 1$, $t \in [t_0, c]$; если в теореме 10 неравенство (14) строгое, то строгие и неравенства (15); если в теореме 11 неравенство (16) строгое, то строгие и неравенства (17).

В заключение автор выражает глубокую благодарность акад. С. А. Христиановичу и А. Д. Мышкису за большую помощь при выполнении этой работы.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений
п. о. Менделеево Московской обл.

Поступило
12 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, М., 1951. [2] В. Г. Лиманский, Изв. АН СССР, сер. матем., № 34 (1970).