Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 6

УДК 518.1 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, М. Д. ГЕНКИН, В. К. ГРИНКЕВИЧ, И. М. СОБОЛЬ, Р. Б. СТАТНИКОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ В ТЕОРИИ МАШИН ЛП-ПОИСКОМ

Вопросы оптимального проектирования становятся особенно актуальными в условиях серийного производства и при конструировании дорогостоящего эксперимента.

Оптимальное проектирование включает как поиск схемы конструкции и соответствующих ей параметров по заданным критериям качества, так и создание новых математических методов, учитывающих специфику сложных многопараметрических и многокритериальных задач ([1]).

I. Вместо понятий машина, механизм, конструкция и т. п. введем безразмерный аналог — модель. При заданной кинематической структуре и n степенях свободы модель определяется точкой $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ r-мерного параллелепипеда $(r \geqslant n)$

$$\alpha_j^* \leqslant \alpha_j \leqslant \alpha_j^{**}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r, \tag{1}$$

где α_j^*, α_j^{**} — пределы допустимых вариаций параметров модели. Различные дополнительные ограничения на поведение системы выделяют в параллелепипеде (1) некоторую замкнутую часть G, объем которой мы считаем положительным.

Если качество модели определяется функцией $\Phi(\alpha)$ (критерием качества), определенной в G, то *оптимальной* называется такая модель α^+, что $\Phi(\alpha^+) = \sup\limits_{\alpha \in G} \Phi(\alpha)$.

Условимся писать $\Phi(\alpha|G)$, если $\Phi(\alpha)$ определена в G.

Рассмотрим основные типы задач оптимизации, возникающие в теории машин.

1). *Задачи оптимального анализа*. Задана кинематическая структура модели и несколько критериев качества $\Phi_\gamma(\alpha|G_\gamma)$, $\gamma = 1, 2, \ldots, k$. Прежде чем принять решение об оптимизации модели по одному из этих критериев, или о выборе «компромиссного» критерия $\Phi = \sum\limits_{\gamma=1}^{k} c_\gamma \Phi_\gamma$, необходимо проанализировать роль каждого из критериев. Для этого надо исследовать возможности оптимизации модели по каждому из критериев Φ_γ, которые могут оказаться весьма противоречивыми.

Например, полностью освободить резонансно-опасную зону Ω от собственных частот иногда не удается (из-за наличия разных дополнительных ограничений на вес, габариты, усилия в звеньях и др.). Тогда можно попытаться локализовать все опасные собственные значения ω_i внутри узкой запретной зоны $\omega_i \in [\omega', \omega''] \subset \Omega$. При проектировании космических ракет ([2], [3]) дополнительные ограничения на ω_i связаны с необходимостью исключить влияние упругих деформаций.

2) *Задачи оптимального синтеза*. Задана иерархия сложности структур, расположенных, например, по возрастанию числа степеней свободы. Требуется найти модель, удовлетворяющую некоторым заданным условиям, с наиболее простой структурой. Так, при конструировании пневмосистем необходимо получить модель с заданными динамическими свойствами при минимальном количестве элементов в структуре (полостей,

клапанов и т. д.) или по количеству их переключений в течение цикла при наиболее простой схеме управления ими ([4]).

3) Задачи наилучшего приближения. Пусть $x(t)$ — желательное поведение динамической системы. Требуется среди возможных решений $y(t;\ \alpha)$ системы, описывающей исследуемый процесс, найти такое, которое минимизирует

$$\Phi(\alpha) = \|x(t) - y(t;\ \alpha)\|.$$

Здесь $\|\ \|$ означает не просто расстояние между x и y в какой-нибудь из обычно рассматриваемых метрик (C, L_2, ...), а включает в себя близость некоторых критериев качества ([5]).

II. Отметим некоторые особенности сформулированных задач. Все они многопараметрические. Во всех может потребоваться оптимизация нескольких функций $\Phi_\gamma(\alpha | G_\gamma)$. Области определения критериев G_γ не только не обязаны быть выпуклыми, но во многих случаях не связные. Оптимальные модели могут оказаться на границе G_γ или на границе параллелепипеда (1).

В этих условиях применение классических методов вариационного исчисления, как правило, невозможно. И различные локальные методы поиска экстремума ([6]) далеко не всегда приводят к цели. Необходим глобальный поиск.

«Независимый» случайный поиск (метод Монте-Карло) позволяет одновременно оптимизировать все интересующие нас критерии. Выбор решающего или компромисного критерия можно осуществить в процессе диалога «человек— машина».

Для дальнейшего улучшения модели (если оно требуется) можно использовать локальные методы поиска, которые обычно сходятся в окрестности экстремума. В качестве начального приближения выбирается модель, найденная при глобальном поиске.

III. Вместо случайного поиска предлагается использовать его детерминированный аналог — ЛП-поиск. В ряде сложных задач оптимального проектирования он приводил к существенно лучшим результатам по сравнению со случайным поиском: количество проб уменьшалось в 2—4 раза.

В качестве пробных точек в единичном кубе при ЛП-поиске используются точки $Q_1, Q_2, \ldots$, образующие ЛП$_\tau$-последовательность ([7]). Алгоритм расчета этих точек достаточно прост. Эти точки не случайные, распределение их более равномерно, чем распределение случайных точек.

Равномерность расположения N точек в единичном r-мерном кубе $K^r = \{0 \leqslant x_j \leqslant 1;\ j = 1, 2, \ldots, r\}$ характеризуется величиной отклонения

$$D = \sup_{\Pi} | S_N(\Pi) - NV(\Pi) |,$$

где Π — произвольный параллелепипед ($\Pi \subseteq K^r$) с гранями, параллельными координатным, $V(\Pi)$ — его r-мерный объем, $S_N(\Pi)$ — количество точек, принадлежащих Π. При случайном выборе N точек $D \asymp N^{1/2}$, а для точек $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ величина $D = O(\ln^r N)$. Бесконечные последовательности точек с меньшим порядком роста D неизвестны.

Заметим, что для $N = M^r$ точек с координатами $(i_1 / M, \ldots, i_r / M)$, где $i_1, \ldots, i_r$ равны $1, 2, \ldots, M$, образующих правильную решетку, отклонение $D \asymp N^{1-1/r}$. Этот результат объясняет, почему при $r \geqslant 3$ случайный поиск оказывается на практике лучше, чем поиск по решетке.

Схема ЛП-поиска. По точкам $Q_l = (q_{l,1}, \ldots, q_{l,r})$ вычисляются пробные точки $\alpha^{(l)} = (\alpha_1^{(l)}, \ldots, \alpha_r^{(l)})$ в параллелепипеде (1):

$$\alpha_j^{(l)} = \overset{*}{\alpha}_j + q_{l,j}(\overset{**}{\alpha}_j - \overset{*}{\alpha}_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant r. \tag{2}$$

В каждой точке $\alpha^{(l)}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ рассчитывается соответственно модель и вычисляются все интересующие нас функции $\Phi_\gamma(\alpha^{(l)} | G_\gamma)$, для которых $\alpha^{(l)} \in G_\gamma$. Просматривая значения Φ_γ, полученные при $l = 1, 2, \ldots, N$, отбираем p наилучших точек по отношению к каждому из критериев.

Уточнение наилучшей модели в ряде задач осуществлялось методом градиентного или покоординатного поиска, причем все p точек использовались в качестве начальных.

Пример 1. Рассмотрим колебательную систему с тремя степенями свободы ([8]). Требуется найти модель наименьшей длины и модель с максимальной разностью между первой и второй собственными частотами при ограничениях, указываемых ниже.

Параметры задачи — диаметры валов и дисков d_j и D_j и длины валов l_j ограничены неравенствами

$$0{,}05 \leqslant d_j \leqslant 0{,}10; \quad 0{,}8 \leqslant D_j \leqslant 1{,}6; \quad 0{,}5 \leqslant l_j \leqslant 1{,}2, \tag{3}$$

толщина дисков фиксирована (0,04). Вид характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - I_1\omega^2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - I_2\omega^2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - I_3\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Формулы, определяющие инерционные и жесткостные факторы $I_j = I(D_j, d_j)$ и $k_j = k(l_j, d_j)$ обычные, вес системы $g = \sum_{j=1}^{3} [g(l_j, d_j) + g(D_j)]$, длина системы $l = \sum_{j=1}^{3} l_j$. Критерии качества $\Phi_1(\alpha) = l$ и $\Phi_2(\alpha) = |\omega_1 - \omega_2|$. Определить $\inf \Phi_1(\alpha | g \leqslant g^*, \omega_j \in [\omega_j', \omega_j''], j = 1, 2, 3)$ при $g \leqslant 1500$; $5 \cdot 10^2 \leqslant \omega_1 \leqslant 7 \cdot 10^3$; $5 \cdot 10^3 \leqslant \omega_2 \leqslant 3 \cdot 10^4$; $5 \cdot 10^4 \leqslant \omega_3 \leqslant 5 \cdot 10^5$ и $\sup \Phi_2(\alpha | l \leqslant l^*;\ g \leqslant g^*;\ \omega_2 \in [\omega_2^*, \omega_2^{**}])$, где $g \leqslant 1500$; $l \leqslant 2{,}5$; $10^4 \leqslant \omega_2 \leqslant 5 \cdot 10^4$.

ЛП-поиском отыскивались одновременно оптимальные параметры по двум критериям качества в 9-мерном параллелепипеде (3) при указанных ограничениях на собственные частоты, вес и т. д. Результаты расчета оказались следующими:

Критерий качества	D_1	D_2	D_3	l_1	l_2	l_3	$10^3 d_1$	$10^3 d_2$	$10^3 d_3$
$\inf \Phi_1(\alpha) = 1{,}563$	1,316	1,085	1,549	0,5381	0,5000	0,5252	50,00	50,56	63,14
$\sup \Phi_2(\alpha) = 49440$	0,9726	0,8304	1,4789	0,5439	0,9122	0,9751	99,02	59,89	95,24

Для $\inf \Phi_1(\alpha)$ $l = 1{,}5633$; $g = 1337{,}6$, для $\sup \Phi_2(\alpha)$ $l = 2{,}4312$; $g = 1042$.

Пример 2. Найти все точки минимума «овражной» функции

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} (x_i^2 - \cos 18x_i) \text{ в кубе } 0 \leqslant x_i \leqslant 0{,}5 \ ([6]).$$

По формуле (3) вычислялись N точек в исследуемом кубе и из каждой из них осуществлялся спуск полношаговым градиентным методом. Все 8 минимумов

$$\Phi(0, 0, 0) = -3, \quad \Phi(b, b, b) = -2{,}6367, \quad \Phi(b, 0, 0) = \Phi(0, b, 0) = \Phi(0, 0, b) = -2{,}8789,$$

$$\Phi(b, b, 0) = \Phi(b, 0, b) = \Phi(0, b, b) = -2{,}7578,$$

где $b = 0{,}3469$, были найдены при $N = 32$.

Замечание 1. Нередко вместо отыскания максимума (или минимума) критерия качества $\Phi(\alpha)$ требуется указать такие модели, что

$$C^* \leqslant \Phi(\alpha) \leqslant C^{**}.$$

Можно считать, что это неравенство определяет множество динамически эквивалентных моделей ([9]). Если в процессе ЛП-поиска отбирать все точки, удовлетворяющие последнему неравенству, то получим равномерную выборку из этого множества.

Замечание 2. Используемые при изучении динамики машин задачи на минимакс (максимин) ([10]) могут быть сведены к отысканию наибольших или наименьших значений весьма сложных функций, так как $\min\limits_{\alpha\in G}\max\limits_{\alpha'\in G'} F(\alpha;\,\alpha') = \min\limits_{\alpha\in G} \Phi\,(\alpha)$, где

$$\Phi\,(\alpha) = \max_{\alpha'\in G'} F\,(\alpha;\alpha')\,.$$

Государственный научно-исследовательский
институт машиноведения
Москва

Поступило
14 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Артоболевский, Машиноведение, № 1 (1965). [2] С. П. Рубин, Ракетная техника и космонавтика, Proc. of the AIAA, 8, № 5 (1970). [3] В. К. Гринкевич, Р. Б. Статников, Машиноведение, № 4 (1970). [4] Г. В. Крейнин, Сборн. Механика машин, в. 19—20, «Наука», 1969. [5] И. А. Орурк, Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем, «Наука», 1965. [6] Л. А. Растригин, Статистические методы поиска, «Наука», 1968. [7] И. М. Соболь, Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара, «Наука», 1969. [8] Ф. С. Цзе, И. Е. Морзе, Р. Т. Хинкл, Механические колебания, 1966. [9] В. К. Гринкевич, И. М. Соболь, Р. Б. Статников, Машиноведение, № 1 (1971). [10] А. Н. Голубенцев, Интегральные методы в динамике, Киев, 1967.